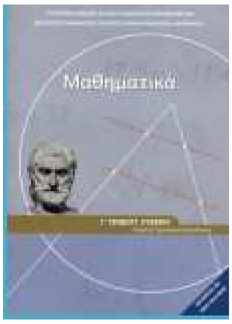


ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

Σημειώσεις: Σώλος Γιάννης

$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

$(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$

$(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$

$(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$

$\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$

$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$

$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$

$\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)^3 + 3\alpha\beta(\alpha - \beta)$

$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$

$\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$

$(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma$

$(\alpha + \beta + \gamma)^3 = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + 3(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha)$

$(x + \alpha)(x + \beta) = x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$

Ταυτότητα του Euler.

$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma =$

$= (\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)$

$= \frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2]$

αν $\alpha+\beta+\gamma = 0 \Rightarrow \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$

αν $\alpha = \beta = \gamma \Rightarrow \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$

αν $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma \Rightarrow \alpha+\beta+\gamma=0$ ή $\alpha=\beta=\gamma$

$\alpha^\nu - \beta^\nu =$
$(\alpha - \beta)(\alpha^{\nu-1} + \alpha^{\nu-2}\beta + \alpha^{\nu-3}\beta^2 + \ldots + \beta^{\nu-1})$
γιά ν φυσικό.

$\alpha^\nu - \beta^\nu =$
$(\alpha - \beta)(\alpha^{\nu-1} - \alpha^{\nu-2}\beta + \alpha^{\nu-3}\beta^2 - \ldots - \beta^{\nu-1})$
γιά ν άρτιο

$\alpha^\nu + \beta^\nu =$
$(\alpha + \beta)(\alpha^{\nu-1} - \alpha^{\nu-2}\beta + \alpha^{\nu-3}\beta^2 - \ldots + \beta^{\nu-1})$
γιά ν περριτό

Ταυτότητα του Lagrange

$(\alpha^2 + \beta^2)(x^2 + \psi^2) - (\alpha x + \beta\psi)^2 = (\alpha\psi - \beta x)^2$

Αν $\alpha > \beta$ καί $\beta > \gamma$ τότε $\alpha > \gamma$

$\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma > \beta + \gamma$

Αν $\gamma > 0$ τότε $\alpha > \beta \Rightarrow \alpha\gamma > \beta\gamma$, $\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$

Αν $\gamma < 0$ τότε $\alpha > \beta \Rightarrow \alpha\gamma < \beta\gamma$, $\frac{\alpha}{\gamma} < \frac{\beta}{\gamma}$

Αν $\alpha > \beta$ καί $\gamma > \delta \Rightarrow \alpha + \gamma > \beta + \delta$

<u>Δέν μπορούμε να αφαιρέσουμε κατά μέλη ανισότητες</u>.

<u>Δέν μπορούμε να προσθέσουμε κατά μέλη ανισότητες</u>
<u>που δέν έχουν τήν ίδια φορά.</u>

$\alpha > \beta > 0$ καί $\gamma > \delta > 0 \Rightarrow \alpha\gamma > \beta\delta$

<u>Δέν μπορούμε να διαιρέσουμε κατά μέλη ανισότητες</u>.

Γιά θετικούς αριθμούς α,β καί ν θετικό ακέραιο ισχύει

$\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha^\nu > \beta^\nu$, $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha^\nu = \beta^\nu$

$\alpha > \beta \Leftrightarrow -\alpha < -\beta$

$\alpha > \beta$ καί $\gamma > 0 \Rightarrow \frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$

$\alpha > \beta$ καί $\gamma < 0 \Rightarrow \frac{\alpha}{\gamma} < \frac{\beta}{\gamma}$

Αν α,β ομόσημοι
τότε $\alpha < \beta \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta}$

Αν κ,λ είναι ακέραιοι θετικοί αριθμοί ισχύει:

$\alpha > 1$ καί $\kappa > \lambda \Rightarrow \alpha^\kappa > \alpha^\lambda$

$0 < \alpha < 1$ καί $\kappa > \lambda \Rightarrow \alpha^\kappa < \alpha^\lambda$

Αν α,β θετικοί αριθμοί
ισχύει $\alpha > \beta \Rightarrow \alpha^2 > \beta^2$

Αν α,β αρνητικοί αριθμοί ισχύει $\alpha > \beta \Rightarrow \alpha^2 < \beta^2$

Αν $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_\nu$ ε R τότε:

$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_\nu^2 \geq 0$

$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_\nu^2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_\nu = 0$

$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_\nu^2 \leq 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_\nu = 0$

Ανισότητα Bernoulli

$(1 + \alpha)^\nu \geq 1 + \nu\alpha$ $\quad \alpha \geq -1$, $\nu \in N$

$(1 - \alpha)^\nu \geq 1 - \nu\alpha$ $\quad 0 \leq \alpha < 1$, $\nu \in N$

Δηλαδή $|a| = \begin{cases} \alpha \ ,\alpha > 0 \\ 0 \ ,\alpha = 0 \\ -\alpha \ ,\alpha < 0 \end{cases}$

Γιά κάθε πραγματικό αριθμό α, $|\alpha| \geq 0$
καί $|a| > 0$ όταν $\alpha \neq 0$.

Γιά κάθε πραγματικό αριθμό α, $|\alpha| = |-\alpha|$

Γιά κάθε πραγματικό αριθμό α,
$|\alpha| \geq \alpha$ καί $|\alpha| \geq -\alpha$.

Γιά κάθε πραγματικό αριθμό α ισχύει:
$-|\alpha| \leq \alpha \leq |\alpha|$

$\alpha = 0 \Leftrightarrow |\alpha| = 0$

$|\alpha|^2 = \alpha^2$

Δύο πραγματικοί αριθμοί έχουν ίσες απόλυτες τιμές,
αν καί μόνο αν είναι ίσοι ή αντίθετοι.
$|\alpha| = |\beta| \Leftrightarrow \alpha = \beta$ ή $\alpha = -\beta$

$|x| = \alpha \begin{cases} \text{αδυνατη}, & \text{αν } \alpha < 0 \\ 0, & \text{αν } \alpha = 0 \\ x = \alpha \text{ η } x = -\alpha, & \text{αν } \alpha > 0 \end{cases}$

Αν $\theta > 0$ τότε $|x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta$

Αν $\theta < 0$ τότε είναι αδύνατη

Αν $\theta > 0$ τότε $|x| > \theta \Leftrightarrow x > \theta$ ή $x < -\theta$

$|\alpha\beta| = |\alpha|\,|\beta| \qquad \left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right| = \dfrac{|\alpha|}{|\beta|}, \ \beta \neq 0$

$|\alpha_1\alpha_2 \ldots\ldots \alpha_\nu| = |\alpha_1||\alpha_2| \ldots\ldots |\alpha_\nu|$

$\big||\alpha| - |\beta|\big| \leq |\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$

$|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta| \Leftrightarrow \alpha\beta \geq 0$

$\big|\alpha - |\beta|\big| \leq |\alpha - \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$

$\sqrt{0} = 0$

Το σύμβολο $\sqrt{\alpha}$ έχει νόημα πραγματικού αριθμού μόνο όταν $\alpha \geq 0$

$\forall\ \alpha \geq 0$ είναι $\sqrt{\alpha} \geq 0$

$\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$, ενώ $\left(\sqrt{\alpha}\right)^2 = \alpha$

$\sqrt{\alpha}\ \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha\beta}$

$\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}$

Ισχύει η ισοδυναμία $x^2 = \alpha \Leftrightarrow x = \sqrt{\alpha}$
$x,\ \alpha \geq 0$

Για να είναι η $\sqrt{\alpha}$ <u>ρητός αριθμός</u> πρέπει και αρκεί ο αριθμός α να είναι τετράγωνο ρητού αριθμού.

Ο αριθμός $\sqrt{\alpha^2}$ ορίζεται για κάθε α^2 γιατί $\alpha^2 \geq 0$.

Γενικά είναι $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} \neq \sqrt{\alpha + \beta}$

Ισχύουν: $\sqrt{\alpha} = \sqrt{\beta} \Leftrightarrow \alpha = \beta$

$\sqrt{\alpha} > \sqrt{\beta} \Leftrightarrow \alpha > \beta$ με $\alpha, \beta \geq 0$.

$\alpha\sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha^2\beta}$

Ισχύει $x^\nu = \alpha \Leftrightarrow x = \sqrt[\nu]{\alpha}$
$x, \alpha \in R_+$, $\nu \in N^*$

Στό σύμβολο $\sqrt[\nu]{\alpha}$ το α λέγεται υπόριζο, καί έχει
νόημα πραγματικού αριθμού μόνο όταν $\alpha \geq 0$.

Αν $\alpha \geq 0$ τότε $\sqrt[\nu]{\alpha} \geq 0$.

$\sqrt[\nu]{0} = 0$

Αν $\alpha \geq 0$ τότε $(\sqrt[\nu]{\alpha}) = \alpha$ καί $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu} = \alpha$

Γενικά $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu} = |\alpha|$

αν (ν) άρτιος $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu} = \alpha$
αν (ν) περιττός με $\alpha \geq 0$.

$\sqrt[\nu]{\alpha\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha}\ \sqrt[\nu]{\beta}$ με $\alpha, \beta \geq 0$

$\sqrt[\nu]{\dfrac{\alpha}{\beta}} = \dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}}$ με $\alpha \geq 0$, $\beta > 0$

$\sqrt[\nu]{\alpha^k} = \left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^k$ με $\alpha \geq 0$, $k \in N$

$\sqrt[\nu]{\alpha^\nu\beta} = \alpha\sqrt[\nu]{\beta}$ με $\alpha, \beta \geq 0$

$\sqrt[k]{\sqrt[\nu]{\alpha}} = \sqrt[k\nu]{\alpha}$ με $\alpha \geq 0$

$\sqrt[k\nu]{\alpha^{k\lambda}} = \sqrt[\nu]{\alpha^\lambda}$ με $\alpha \geq 0$

$\alpha < \beta \Leftrightarrow \sqrt[\nu]{\alpha} < \sqrt[\nu]{\beta}$ με $\alpha, \beta \geq 0$

$\sqrt[\nu]{\alpha_1}\sqrt[\nu]{\alpha_2}\sqrt[\nu]{\alpha_3} \ldots\ldots \sqrt[\nu]{\alpha_k} = \sqrt[\nu]{\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots\ldots \alpha_k}$

Ισχύει $\sqrt[\nu]{\alpha^\mu} = |a|^{\frac{\mu}{\nu}} = a^{\frac{\mu}{\nu}}$, $\alpha > 0$

Γιατί $2 = 2^{\frac{3}{3}} = (2^3)^{\frac{1}{3}} = (8)^{\frac{1}{3}} = (8^{\frac{2}{2}})^{\frac{1}{3}} = (8^2)^{\frac{1}{6}} = [(-8)^2]^{\frac{1}{6}} = (-8)^{\frac{2}{6}} = [(-2)^3]^{\frac{1}{3}} = (-2)^{\frac{3}{3}} = -2$

$(α_ν)$ αριθμητική πρόοδος $\Leftrightarrow$ $α_{ν+1}=α_ν + ω$

$α_ν = α_1 + (ν - 1)\,ω$ γιά κάθε ν ε N^*.

α,β,γ διαδ όροι αριθμ πρ $\Leftrightarrow 2β = α + γ$

$S_ν = \frac{1}{2}(α_1+α_ν)ν = [2α_1+(ν-1)ω]\frac{ν}{2}$

$(α_ν)$ γεωμετρική πρόοδος $\Leftrightarrow α_{ν+1}=α_ν\,λ$, $λ \neq 0$

$α_ν = α_1\,λ^{ν-1}$

α,β,γ είναι διαδ όροι γεωμ.πρ $\Leftrightarrow$ $β^2 = α\,γ$.

$S_ν = α_1\,\frac{λ^ν - 1}{λ - 1}$

$$1 + 2 + 3 + ... + ν = \frac{ν(ν+1)}{2}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + ν^2 = \frac{ν(ν+1)(2ν+1)}{6}$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + ν^3 = \left[\frac{ν(ν+1)}{2}\right]^2$$

$$\frac{α+β}{2} \geq \sqrt{αβ} \geq \frac{2}{\frac{1}{α}+\frac{1}{β}}$$

$-1 \leq ημω \leq 1 \Leftrightarrow |ημω| \leq 1$ $\qquad$ $-1 \leq συνω \leq 1 \Leftrightarrow |συνω| \leq 1$

$ημ^2ω + συν^2ω = 1$ $\qquad$ $εφω = \frac{ημω}{συνω}$ $συνω \neq 0$ $\qquad$ $σφω = \frac{συνω}{ημω}$, $ημω \neq 0$ $\qquad$ $εφω\,σφω = 1$

$εφω = \frac{1}{σφω}$ $\qquad$ $σφω = \frac{1}{εφω}$ $\qquad$ $συν^2ω = \frac{1}{1+εφ^2ω}$ $\qquad$ $ημ^2ω = \frac{εφ^2ω}{1+εφ^2ω}$

$ημχ = ημθ \Leftrightarrow χ=2κπ+θ$ ή $χ=2κπ+π-θ$, $κ \in Z$

$συνχ = συνθ \Leftrightarrow χ=2κπ+θ$ ή $χ=2κπ-θ$, $κ \in Z$

$εφχ = εφθ \Leftrightarrow χ=κπ+θ$, $κ \in Z$

$σφχ = σφθ \Leftrightarrow χ=κπ+θ$, $κ \in Z$

$ημχ = -1 \Leftrightarrow χ = 2κπ + \frac{3π}{2}$ $\qquad$ $ημχ = 0 \Leftrightarrow χ = κπ$ $\qquad$ $ημχ = 1 \Leftrightarrow χ = 2κπ + \frac{π}{2}$

$συνχ = -1 \Leftrightarrow χ = 2κπ + π$ $\qquad$ $συνχ = 0 \Leftrightarrow χ = κπ + \frac{π}{2}$ $\qquad$ $συνχ = 1 \Leftrightarrow χ = 2κπ$

$ημχ = συν(\frac{π}{2} - χ)$ $\qquad$ $συνχ = ημ(\frac{π}{2} - χ)$ $\qquad$ $εφχ = σφ(\frac{π}{2} - χ)$ $\qquad$ $σφχ = εφ(\frac{π}{2} - χ)$

$-ημχ = ημ(-χ)$ $\qquad$ $-εφχ = εφ(-χ)$ $\qquad$ $-σφχ = σφ(-χ)$ $\qquad$ $-συνχ = συν(π-χ)$

$ημ(-ω) = -ημω$ $\qquad$ $συν(-ω) = συνω$ $\qquad$ $εφ(-ω) = -εφω$ $\qquad$ $σφ(-ω) = -σφω$

$ημ(180-ω) = ημω$ $\qquad$ $συν(180-ω) = -συνω$ $\qquad$ $εφ(180-ω) = -εφω$ $\qquad$ $σφ(180-ω) = -σφω$

$συν(α+β)=συνα\,συνβ - ημα\,ημβ$ $\qquad$ $συν(α-β)=συνα\,συνβ + ημα\,ημβ$

$ημ(α+β)=ημα\,συνβ + ημβ\,συνα$ $\qquad$ $ημ(α-β)=ημα\,συνβ - ημβ\,συνα$

$εφ(α+β)=\frac{εφα + εφβ}{1 - εφα\,εφβ}$ $\qquad$ $εφ(α-β)=\frac{εφα - εφβ}{1 + εφα\,εφβ}$

$σφ(α+β)=\frac{σφα\,σφβ - 1}{σφα + σφβ}$ $\qquad$ $σφ(α+β)=\frac{σφα\,σφβ + 1}{σφβ - σφα}$

$ημ2α=2ημα\,συνα$

$συν2α=συν^2α-ημ^2α$

$=2συν^2α-1$

$=1-2ημ^2α$

$ημ3α=3ημα-4ημ^3α$

$συν3α=4συν^3α-3συνα$

$συν^2α=\frac{1+συν2α}{2}$ $ημ^2α=\frac{1-συν2α}{2}$

Β Α Σ Ι Κ Ο Σ		Π Ι Ν Α Κ Α Σ			
Γωνία ω		Τριγωνομετρικοί αριθμοί			
μοίρες	rad	ημω	συνω	εφω	σφω
0°	0	0	1	0	#
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	#	0

$εφ^2α=\frac{1-συν2α}{1+συν2α}$ $σφ^2α=\frac{1+συν2α}{1-συν2α}$ $εφ2α=\frac{2εφα}{1-εφ^2α}$ $σφ2α=\frac{σφ^2α-1}{2σφα}$

$ημ2α=\frac{2εφα}{1+εφ^2α}$ $συν2α=\frac{1-εφ^2α}{1+εφ^2α}$ $εφ2α=\frac{2εφα}{1-εφ^2α}$

$ημα=\frac{2εφ\frac{α}{2}}{1+εφ^2\frac{α}{2}}$ $συνα=\frac{1-εφ^2\frac{α}{2}}{1+εφ^2\frac{α}{2}}$ $εφα=\frac{2εφ\frac{α}{2}}{1-εφ^2\frac{α}{2}}$

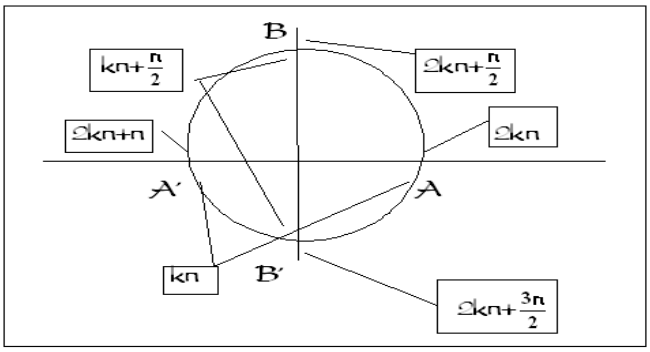
2ημα συνβ=ημ(α+β)+ημ(α-β)

2συνα συνβ=συν(α+β)+συν(α-β)

2ημα ημβ=συν(α-β)-συν(α+β)

$ημA+ημB=2\,ημ\frac{A+B}{2}\,συν\frac{A-B}{2}$ $ημA-ημB=2\,ημ\frac{A-B}{2}\,συν\frac{A+B}{2}$

$συνA+συνB=2\,συν\frac{A+B}{2}\,συν\frac{A-B}{2}$ $συνA-συνB=2\,ημ\frac{A+B}{2}\,ημ\frac{B-A}{2}$



<u>Νόμος Ημιτόνων</u>

Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε

$$\frac{α}{ημA}=\frac{β}{ημB}=\frac{γ}{ημΓ}=2R$$

Σχόλιο: Εχουμε α=2R ημΑ, β=2R ημΒ, γ=2R ημΓ.

<u>Νόμος Συνημιτόνων</u>

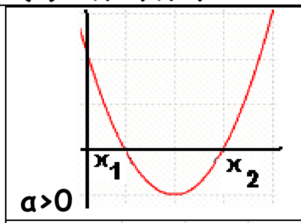
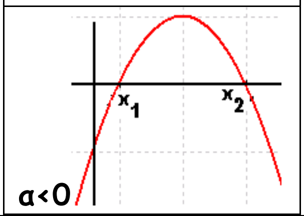
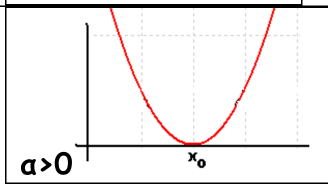
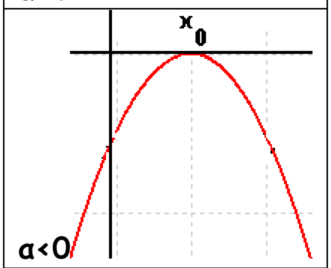
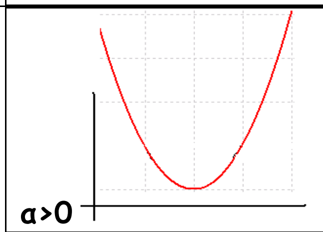
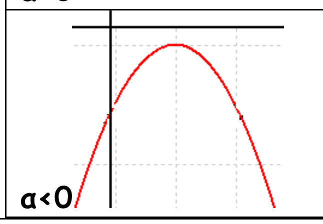
Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε

$α^2=β^2+γ^2-2βγσυνA$

$β^2=α^2+γ^2-2αγσυνB$

$γ^2=α^2+β^2-2αβσυνΓ$

Σχόλιο: Εχουμε $συνA=\frac{β^2+γ^2-α^2}{2βγ}$

Συμπεράσματα για την εξίσωση $αx^2+βx+γ=0$ με $α \neq 0$, $α,β,γ \in R$	Ανάλυση τριωνύμου	Πρόσημο τριωνύμου	Γραφική Παράσταση Συνάρτησης $f(x)=αx^2+βx+γ$
Εχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες $Δ > 0 \quad x_{1,2} = \dfrac{-β \pm \sqrt{Δ}}{2α}$	αναλύεται $α(x-x_1)(x-x_2)$	α>0 $-\infty \quad x_1 \quad x_2 \quad +\infty$ $+ \quad 0 \quad - \quad 0 \quad +$ α<0 $-\infty \quad x_1 \quad x_2 \quad +\infty$ $- \quad 0 \quad + \quad 0 \quad -$	
Εχει ίσες ρίζες ή μια διπλή λύση $Δ = 0 \qquad x_0 = -\dfrac{β}{2α}$	αναλύεται $α(x - x_0)^2$	α>0 $-\infty \quad x_0 \quad +\infty$ $+ \quad 0 \quad +$ α<0 $-\infty \quad x_0 \quad +\infty$ $- \quad 0 \quad -$	
Δ<0 δεν έχει πραγματικές ρίζες	Δεν αναλύεται	α>0 $-\infty \qquad +\infty$ $+$ α<0 $-\infty \qquad +\infty$ $-$	

Η κορυφή της παραβολής $K\left(-\dfrac{β}{2α}, -\dfrac{Δ}{4α}\right)$ $\quad S=x_1+x_2= -\dfrac{β}{α}$ $\quad P=x_1x_2= \dfrac{γ}{α}$

$\vec{AB} + \vec{BΓ} = \vec{AΓ}$, $\qquad \vec{OB} - \vec{OA} = \vec{AB}$

$M(x_M, ψ_M)$ μέσο του ΑΒ τότε $x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2}$, $ψ_M = \dfrac{y_A + y_B}{2}$

G βαρύκεντρο ΑΒΓ τότε $x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_Γ}{3}$, $ψ_G = \dfrac{y_A + y_B + y_Γ}{3}$

$\vec{AB} = (\chi_B - \chi_A, \psi_B - \psi_A)$ $d(A,B) = (AB) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

$\vec{u} // \vec{v}$ (γραμμικώς εξαρτημένα) $\Leftrightarrow$ $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0$

$\vec{\alpha} = (\chi, \psi)$ τότε $\lambda = \varepsilon\varphi\phi = \frac{y}{x}$

$\vec{\alpha}\vec{\beta} = |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\sigma\upsilon\nu(\vec{\alpha} \wedge \vec{\beta}) = \chi_1\chi_2 + \psi_1\psi_2 = \vec{\alpha}\vec{\beta} = \vec{\alpha}\ \pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}$

$\sigma\upsilon\nu(\vec{\alpha} \wedge \vec{\beta}) = \frac{\vec{\alpha}\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|}$ $\Leftrightarrow$ τότε είναι $\sigma\upsilon\nu(\vec{\alpha} \wedge \vec{\beta}) = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$

$\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha}\vec{\beta} = 0$

$\varepsilon // \vec{v} \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = \varepsilon\varphi\omega = \lambda_v = \frac{\beta}{a} = \frac{\tau\varepsilon\tau\alpha\gamma\mu\varepsilon\nu\eta}{\tau\varepsilon\tau\mu\eta\mu\varepsilon\nu\eta}$, $\vec{v} = (\alpha, \beta)$ με $\alpha \neq 0$ $\lambda_\varepsilon = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \varepsilon\varphi\omega$

$\varepsilon // \eta \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = \lambda_\eta$. αν $\varepsilon \perp \eta \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon \lambda_\eta = -1$.

Η ευθεία που περνά από το $A(x_A, y_A)$ και έχει σ.δ λ έχει εξίσωση ε: $\psi - \psi_A = \lambda(\chi - \chi_A)$

Αν ε//ψψ΄ τότε η ευθεία που διέρχεται από το $A(x_A, y_A)$ παράλληλη στόν ψψ΄ είναι $x = x_A$.

Αν ε//χχ΄ τότε η ευθεία που διέρχεται από το $A(x_A, y_A)$ παράλληλη στόν χχ΄ είναι $y = y_A$.

Η εξίσωση του άξονα χχ΄ είναι $y = 0$.

Η εξίσωση του άξονα ψψ΄ είναι $x = 0$.

Η ευθεία που διέρχεται από το Β(0,β) καί έχει συντελεστή διευθύνσεως λ είναι $y = \lambda x + \beta$.

Η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και έχει συντελεστή διευθύνσεως λ είναι $y = \lambda x$.

Κάθε εξίσωση της μορφής $A x + B y + \Gamma = 0$, στην οποία ένας τουλάχιστον από τούς συντελεστές Α καί Β δεν είναι μηδέν, παριστάνει ευθεία. Και αντιστρόφως κάθε ευθεία του επιπέδου έχει εξίσωση την παραπάνω μορφή. Αν $B \neq 0$, ο συντελεστής διευθύνσεως είναι $\lambda = -\frac{A}{B}$.

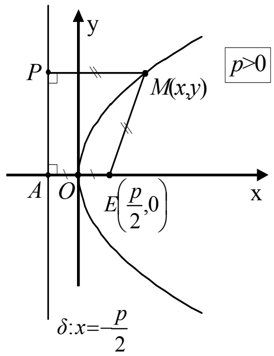
Η απόσταση του $P(\chi_1, \psi_1)$ από την ε: $A\chi + B\psi + \Gamma = 0$ είναι $d(P,\varepsilon) = \frac{|A x_1 + B y_1 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

Το εμβαδό τριγώνου ΑΒΓ είναι $(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\left\| \begin{matrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ x_\Gamma - x_A & y_\Gamma - y_A \end{matrix} \right\|$

Εξίσωση κύκλου με κέντρο $K(\chi_o, \psi_o)$ καί ακτίνα ρ είναι $(\chi - \chi_o)^2+(\psi - \psi_o)^2 = \rho^2$

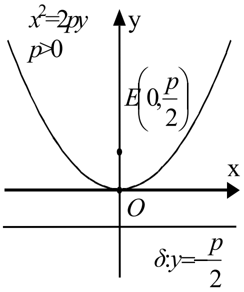
Αν το κέντρο του κύκλου είναι η αρχή O(0,0) των αξόνων τότε η εξίσωση του είναι: $\chi^2 + \psi^2 = \rho^2$

Η $\chi^2 + \psi^2 + A\chi + B\psi + \Gamma = 0$ είναι εξίσωση κύκλου αν και μόνο αν $A^2+B^2-4\Gamma>0$.



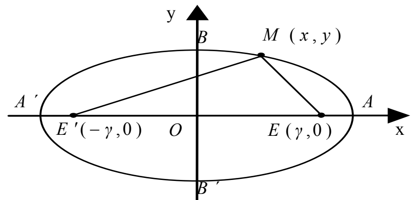
Η εξίσωση της παραβολής με κορυφή O την αρχή ενός ορθοκανονικού συστήματος και διευθετούσα δ παράλληλη στόν ψ'ψ είναι: $\psi^2 = 2\rho\chi$

Κάθε εξίσωση της μορφής $\psi = \alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$, $\alpha\neq 0$ παριστάνει παραβολή η οποία έχει κορυφή $O'(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\Delta}{4\alpha})$ και άξονα συμμετρίας παράλληλο προς τον ψ'ψ.



Η εξίσωση της παραβολής με κορυφή O την αρχή ενός ορθοκανονικού συστήματος και διευθετούσα δ παράλληλη στον x'x είναι: $\chi^2=2\rho\psi$

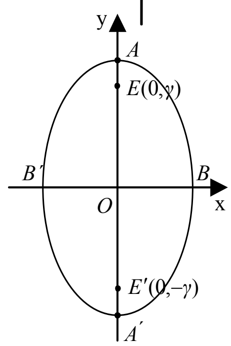
Η εξίσωση της έλλειψης πού η κορυφή της βρίσκεται στή αρχή ενός συστήματος συντεταγμένων και οι εστίες της στον άξονα χ'χ με εστιακή απόσταση 2γ και σταθερό άθροισμα 2α είναι: $\frac{\chi^2}{\alpha^2}+\frac{\psi^2}{\beta^2}=1$



όπου $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2$

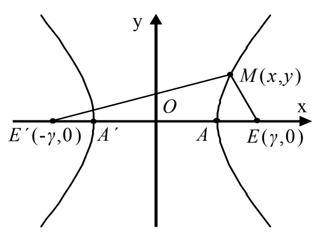
Η εξίσωση της έλλειψης πού η κορυφή της βρίσκεται στη αρχή ενός συστήματος συντεταγμένων και οι εστίες της στον άξονα y'yχ με εστιακή απόσταση 2γ και σταθερό άθροισμα 2α είναι: $\frac{\chi^2}{\beta^2}+\frac{\psi^2}{\alpha^2}=1$ όπου

$\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2$



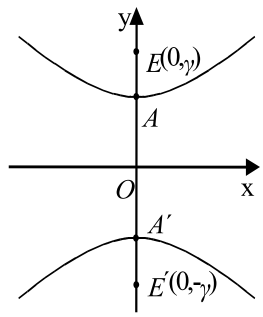
Η υπερβολή με αρχή O την αρχή ενός συστήματος αναφοράς, τις εστίες της πάνω στον άξονα χ'χ, με εστιακή απόσταση 2γ και σταθερή διαφορά 2α, έχει εξίσωση:

$\frac{\chi^2}{\alpha^2}-\frac{\psi^2}{\beta^2}=1$ όπου $\beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2$



Η υπερβολή με αρχή O την αρχή ενός συστήματος αναφοράς, τις εστίες της πάνω στον άξονα y'y , με εστιακή απόσταση 2γ καί σταθερή διαφορά 2α, έχει εξίσωση:

$\frac{\psi^2}{\alpha^2}-\frac{\chi^2}{\beta^2}=1$ όπου $\beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2$.



<u>Η Θεωρία της κατεύθυνσης</u>

Τι πρέπει να γνωρίζει ο μαθητής από το Κεφάλαιο Συναρτήσεις

1. Επανάληψη στο R.
2. ταυτότητες
3. εξισώσεις
4. ανισώσεις
5. απόλυτα
6. ρίζες
7. τριώνυμο
8. τριγωνομετρία
9. πολυώνυμα
10. αριθμητική – γεωμετρική πρόοδος
11. εκθετική συνάρτηση
12. λογάριθμοι
13. λογαριθμική συνάρτηση
14. ορισμός συνάρτησης
15. βασικές έννοιες ορισμών
16. εύρεση πεδίου ορισμού
17. Σχέση σημείων και γραφικής παράστασης συνάρτησης
18. Η γραφική παράσταση συνάρτηση που τέμνει τους άξονες , κοινά σημεία καμπυλών και πότε μια υπεράνω της άλλης.
19. Αρτιες, περιττές συναρτήσεις και γεωμετρική ερμηνεία γεωμετρικής παράστασης
20. Ισότητα συναρτήσεων
21. πράξεις με συναρτήσεις
22. γνησίως μονότονες συναρτήσεις
23. ακρότατα συνάρτησης
24. Σύνολο τιμών και εύρεση με την βοήθεια της μονοτονίας
25. σύνθεση συναρτήσεων
26. συναρτησιακές σχέσεις
27. συνάρτηση «1-1»
28. αντίστροφη συνάρτηση

Τι πρέπει να γνωρίζει ο μαθητής από το Κεφάλαιο Ορίων

1. Η έννοια του ορίου με προσέγγιση την γραφική παράσταση
2. ορισμός του ορίου στο χ_0 εR
3. υπολογισμός ορίου στο χ_0 εR της μορφής $\frac{0}{0}$

   πολυωνυμικής μορφής, ριζικά 2^{α} τάξης , ριζικά ανώτερης τάξης, ριζικά με απόλυτα

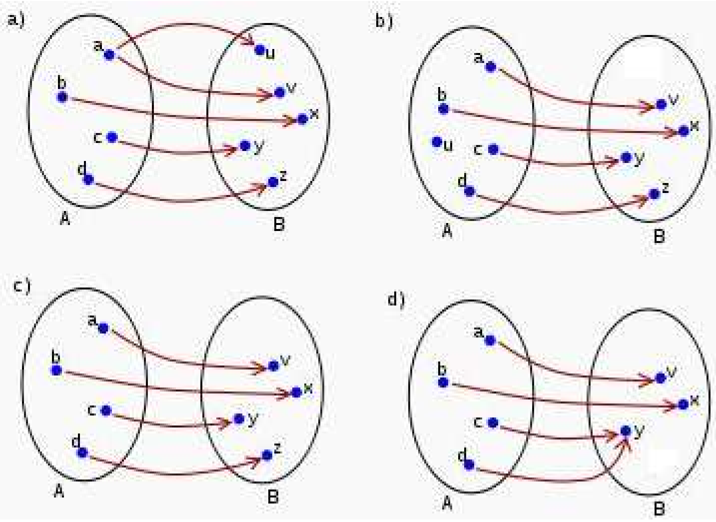
4. όριο στο χ_0 εR που τείνει στο άπειρο $\left(\frac{\alpha}{0}\right)$
5. εύρεση παραμέτρων για την ύπαρξη των ορίων
6. εύρεση ορίων θεωρητικών παραστάσεων
7. ιδιότητες των ορίων
8. όριο και διάταξη
9. το κριτήριο παρεμβολής
10. τριγωνομετρικά όρια με $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\varepsilon\varphi x}{x}=1$
11. τριγωνομετρικά όρια μηδενική επί φραγμένη
12. όριο στο $\pm\infty$
13. υπολογισμός ορίου στο $\pm\infty$
    πολυωνυμικής μορφής, ριζικά 2^{α} τάξης , ριζικά ανώτερης τάξης,
    ριζικά με απόλυτα
14. εύρεση παραμέτρων για την ύπαρξη των ορίων
15. Συνέχεια συνάρτησης
16. Θ. Bolzano- Θ. Ενδιάμεσης τιμής-
    Σύνολο τιμών συνεχούς και μονότονης συνάρτησης

Τι πρέπει να γνωρίζει ο μαθητής από το Κεφάλαιο Παραγώγων

1. Η έννοια της παραγώγου με όλους τους δυνατούς συμβολισμούς
2. Παράγωγος και συνέχεια και εύρεση παραμέτρων σε αντίστοιχες ασκήσεις
3. Υπολογισμός διαφόρων ορίων που χρειάζονται κάποιο τύπο παραγώγου
4. Κανόνες παραγώγισης και υπολογισμός παράγωγος τυχαίας συνάρτησης
5. Εξίσωση εφαπτομένης
6. Ευρεση εφαπτόμενης που ικανοποιεί μια ιδιότητα
7. Ευρεση κοινής εφαπτόμενης στο ίδιο σημείο ή σε διαφορετικό δύο συναρτήσεων και υπολογισμός παραμέτρων
8. Γεωμετρική ερμηνεία παραγώγου
9. Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης
10. Κανόνας αλυσίδας και παράγωγος ανωτέρας τάξης
11. Ρυθμός μεταβολής
12. Θ. Fermat γεωμετρική του ερμηνεία και εφαρμογή του σε θεωρητικά θέματα
13. Θ.Rolle γεωμετρική του ερμηνεία και εφαρμογή του σε θεωρητικά θέματα
14. Ευρεση κατάλληλης συνάρτησης για εφαρμογή του Θ.Rolle στην ύπαρξη ρίζας σε εξίσωση
15. Να δείχνει ότι μια εξίσωση έχει:
    το πολύ κ-ρίζες, τουλάχιστον κ-ρίζες, ακριβώς κ-ρίζες.
16. Θ. Μέσης Τιμής του διαφορικού λογισμού γεωμετρική του ερμηνεία και εφαρμογή του σε θεωρητικά θέματα
17. Να δείχνει ανισότητες με την βοήθεια του Θ.Μ.Τ.Δ.Λ.
18. Συνέπειες Θ.Μ.Τ – Σταθερή συνάρτηση
19. Εύρεση συνάρτησης και ποιος ο τύπος της όταν ικανοποιείται μια σχέση

20. Μονοτονία συνάρτησης και εύρεση παραμέτρων ώστε η συνάρτηση να είναι γνησίως μονότονη
21. Τοπικά ακρότατα και πότε η συνάρτηση δεν παρουσιάζει τοπικά ακρότατα.
22. Εύρεση παραμέτρων ώστε η συνάρτηση να παρουσιάζει τοπικά ακρότατα σε δοσμένα σημεία.
23. Εξισώσεις που λύνονται με την μονοτονία και μοναδικότητα ρίζας .
24. Να αποδεικνύει ανισώσεις με την βοήθεια της μονοτονίας
25. Εύρεση συνόλου τιμών
26. Εύρεση πλήθους ριζών εξίσωσης
27. Προβλήματα που αφορούν μέγιστα και ελάχιστα.
28. Κυρτή και κοίλη συνάρτηση και σημεία καμπής
29. Εύρεση παραμέτρων ώστε η συνάρτηση να παρουσιάζει σημεία καμπής σε δοσμένα σημεία.
30. Οι κανόνες του de L’ Hospital
31. Ασύμπτωτες

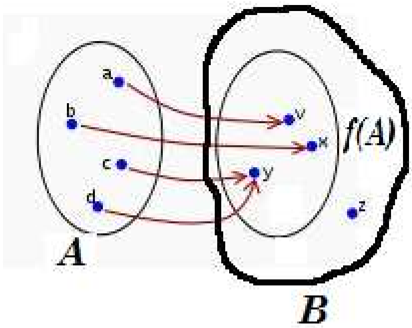
1. Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση



Έστω A ένα υποσύνολο του R. Ονομάζουμε **πραγματική συνάρτηση** με **πεδίο ορισμού το A** μια διαδικασία (κανόνα) f , με την οποία κάθε στοιχείο xε A αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y. Το y ονομάζεται **τιμή της f στο x** και συμβολίζεται με **f (x)** .

<u>Παρατήρηση</u>

Η συνάρτησης f: $A \to B$ και xεB, y=f(x)εB
Το x λέγεται ανεξάρτητη μεταβλητή ενώ το y λέγεται εξαρτημένη μεταβλητή, τιμή της f στο x, εικόνα του x.



2. Τι ονομάζουμε Σύνολο τιμών

Σύνολο τιμών της συνάρτησης f: $A \to B$ λέγεται το σύνολο εκείνων των στοιχείων του B που είναι τιμές της συνάρτησης.
Το σύνολο αυτό το συμβολίζουμε με f(A).
Δηλαδή: f(A)={ψεB : /χεA με ψ=f(χ) }.

3. Τι ονομάζουμε πεδίο ορισμού

Πεδίο ορισμού θα παίρνουμε το « ευρύτερο υποσύνολο του R με την ιδιότητα για κάθε χεA μπορεί να οριστεί ο πραγματικός αριθμός f(χ)» Δηλαδή A={χεR : f(χ)εR }.

4.Πώς ορίζεται η Γραφική παράσταση συνάρτησης

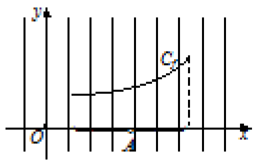
Εστω η συνάρτηση f:$A \to B$ με πεδίο ορισμού το σύνολο A. Κάθε xεA με την εικόνα του y=f(x) δημιουργεί ένα ζεύγος τιμών το (x,y) που είναι οι συντεταγμένες ενός σημείου M(x,y) στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων. Το σύνολο (C_f) των σημείων που θα δημιουργηθεί πάνω στο επίπεδο Oχψ το λέμε γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

<u>Παρατηρήσεις</u>

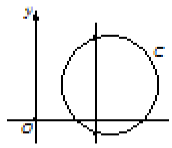
1. Εστω (C_f) η γραφικής παράστασης της συνάρτησης f:$A \to B$.
   Η εξίσωση της μορφής ψ=f(χ) λέγεται εξίσωση της γραφικής παράστασης (C_f) της συνάρτησης f.

Ένα σημείο Μ(α,β) ανήκει στη C_f αν και μόνο αν οι συντεταγμένες του σημείου ικανοποιούν την εξίσωση της συνάρτησης f, δηλαδή: Μ(α,β)ε $C_f \Leftrightarrow$ β=f(α)

2. Η γραφικής παράστασης της συνάρτησης f κόβεται από ευθεία παράλληλη προς τον άξονα ψ΄ψ το πολύ σε ένα σημείο, και αυτό γιατί σε κάθε χ του Α αντιστοιχίζεται ένας πραγματικός αριθμός f(χ). Δηλαδή δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f που να έχουν ίδια τετμημένη.



3. Αν μια γραμμή (C) κόβεται από ευθεία παράλληλη προς τον άξονα ψ΄ψ το λιγότερο σε δύο σημεία, τότε η (C) δεν είναι γραφική παράσταση συνάρτησης, γιατί γνωρίζουμε ότι σε μία συνάρτηση σε κάθε χ του πεδίου ορισμού αντιστοιχίζεται μόνο ένας πραγματικός αριθμός f(χ), δηλαδή δεν υπάρχουν σημεία της γ.π με την ίδια τετμημένη.

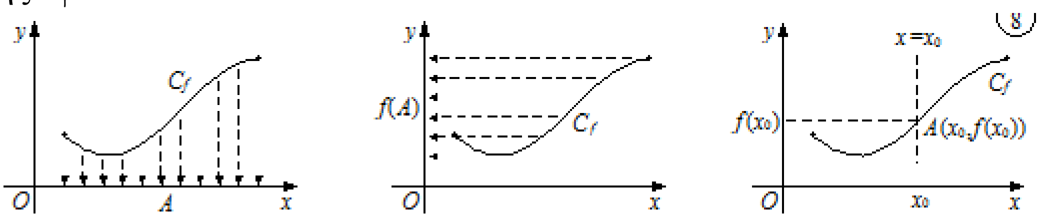


4. Όταν δίνεται η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f, τότε:

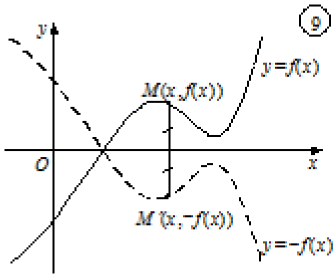
α) Το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο Α των τετμημένων των σημείων της C_f.

β) Το σύνολο τιμών της f είναι το σύνολο $f(A)$ των τεταγμένων των σημείων της C_f.

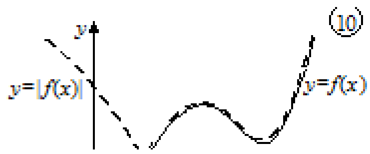
γ) Η τιμή της f στο $x_0 \in A$ είναι η τεταγμένη του σημείου τομής της ευθείας $x = x_0$ και της C_f



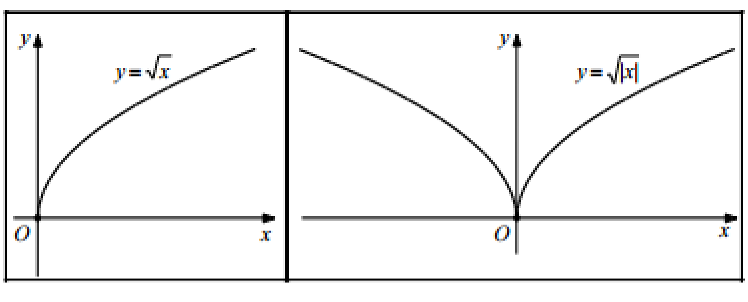
5. Η γραφική παράσταση της ψ=-f(χ) είναι συμμετρική της ψ=f(χ) ως προς τον χ΄χ.
6. Η γραφική παράσταση της ψ=f(-χ) είναι συμμετρική της ψ=f(χ) ως προς τον y'y.
7. Η γραφική παράσταση της ψ=-f(-χ) είναι συμμετρική της ψ=f(χ) ως προς την αρχή αξόνων.
8. Η γραφική παράσταση της ψ=f(χ)+c, c>0 είναι ίδια με την ψ=f(χ) μετατοπισμένη κατά c μονάδες πάνω.



9. Η γραφική παράσταση της ψ=f(χ)-c, c>0 είναι ίδια με την ψ=f(χ) μετατοπισμένη κατά c μονάδες κάτω.
10. Η γραφική παράσταση της ψ=f(χ-c), c>0 είναι ίδια με την ψ=f(χ) μετατοπισμένη κατά c μονάδες δεξιά.
11. Η γραφική παράσταση της ψ=f(χ+c), c>0 είναι ίδια με την ψ=f(χ) μετατοπισμένη κατά c μονάδες αριστερά.
12. Η γραφική παράσταση της $\mathbf{y} = |\mathbf{f(x)}|$ αποτελείται από τα τμήματα της C_f που βρίσκονται πάνω από τον x΄x και από τα συμμετρικά ως προς τον x΄x των τμημάτων της C_f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα αυτόν.



13. Η γραφική παράσταση της $y = f(|x|)$



αποτελείται από τα τμήματα της C_f που βρίσκονται σε $1^{ο}$ και $4^{ο}$ τεταρτημόριο και από τα συμμετρικά αυτών ως προς τον y΄y .

Οι συναρτήσεις $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt{|x|}$

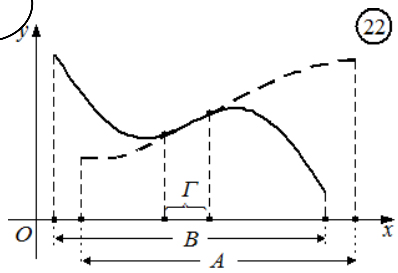
14. Τα σημεία που η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f που τέμνει τον χ΄χ οι τετμημένες αυτών αποτελούν ρίζες της εξίσωσης f(χ)=0. Δηλαδή f(κ)=f(λ)=f(μ)=0.
15. Εστω οι συναρτήσεις f,g με εξισώσεις ψ=f(x)(1), ψ=g(x)(2) και γραφικές παραστάσεις C_f , C_g, αντίστοιχα.
    Για να βρούμε σε ποια σημεία η C_f τέμνει τον χχ΄ θέτουμε ψ=0 στην (1) και εξετάζουμε αν έχει λύση ως προς χ.
16. Για να βρούμε σε ποια σημεία η C_f τέμνει τον ψψ΄ θέτουμε χ=0 στην (1) και εξετάζουμε αν έχει λύση ως προς ψ.
17. Η λύση (οι ρίζες) της εξίσωσης f(χ)=0 μας δίνει τιμές του χ, δηλαδή τετμημένες των σημείων που η γραφική παράσταση C_f τέμνει τον χχ΄.
18. Οι συντεταγμένεστων σημείων τομής των C_f, C_g, προκύπτουν από τη λύση του συστήματος των εξισώσεών τους $\begin{cases} y=f(x) \\ y=g(x) \end{cases}$.Για να μην τέμνονται δύο γραφικές παραστάσεις πρέπει το σύστημα των εξισώσεων τους να είναι αδύνατο.
19. Το διάστημα ή τα διαστήματα των τετμημένων των σημείων που η C_f βρίσκεται υπεράνω του χχ΄ προκύπτουν από τη λύση της ανίσωσης f(χ)>0.
20. Το διάστημα ή τα διαστήματα των τετμημένων των σημείων που η C_f βρίσκεται κάτω του χχ΄ προκύπτουν από τη λύση της ανίσωσης f(χ)<0.
21. Το διάστημα ή τα διαστήματα των τετμημένων των σημείων που η C_f βρίσκεται υπεράνω της C_g, προκύπτουν από τη λύση της ανίσωσης f(χ)>g(x).
22. Το διάστημα ή τα διαστήματα των τετμημένων των σημείων που η C_f βρίσκεται κάτω της C_g, προκύπτουν από τη λύση της ανίσωσης f(χ)<g(x).
23. Μια εξίσωση f(χ)=0 έχει μία μόνο ρίζα, τότε αποδεικνύουμε πρώτα, ότι έχει μία τουλάχιστον (με την βοήθεια του Θ.Bolzano για την f ή βρίσκουμε την αρχική της f την F και εφαρμόζουμε Θ. Rolle για την F) και μετά τη μοναδικότητα (με την βοήθεια της μονοτονίας ή με άτοπο).
24. Μια εξίσωση έχει το πολύ δύο ρίζες, τότε αποδεικνύουμε ότι δεν έχει περισσότερες από δύο (αυτό γίνεται συνήθως με άτοπο).
25. Μια εξίσωση έχει ακριβώς δύο ρίζες, τότε αποδεικνύουμε ότι έχει δύο ρίζες και με την είς άτοπο απαγωγή, ότι δεν έχει περισσότερες.

2007 - 2008Ο
2012Ε - 2014Ο
2016

5. Πότε δύο συναρτήσεις f και g είναι ίσες.

Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες όταν:
• έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού Α και
• για κάθε x ε Α ισχύει f (x) = g(x) .

Σχόλιο: <u>Μπορεί δύο συναρτήσεις να μην έχουν τον ίδιο τύπο και να είναι ίσες</u>.



Πράξεις με συναρτήσεις:

Αν δύο συναρτήσεις f,g ορίζονται και οι δύο σε ένα συνολο Α τότε ορίζονται οι συναρτήσεις

α. Το άθροισμα S=f+g, με S(χ)=f(χ)+g(χ), χεΑ

β. Η διαφορά D=f-g, με D(χ)=f(χ)-g(χ), χεΑ

γ. Το γινόμενο P=f g, με P(χ)=f(χ)g(χ), χεΑ

δ. Το πηλίκο $R=\frac{f}{g}$, με $R(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$, χεΑ και $g(x)\neq 0$

Αν η f ορίζεται στο Α και η g στο Β τότε οι f+g,f-g,fg ορίζονται στο $A \cap B$ (κοινό μέρος), ενώ η $\frac{f}{g}$ ορίζεται στο $A \cap B - \{x / g(x) = 0\}$

Αρτιες - Περιττές συναρτήσεις

Η συνάρτηση f:Α→Β λέγεται άρτια όταν για κάθε χεΑ ισχύουν :
-χεΑ και f(-χ)=f(χ).

Παρατηρήσεις

Το πεδίο ορισμού μιάς άρτιας συνάρτησης είναι διάστημα ή διαστήματα συμμετρικά ως προς το μηδέν.

Κάθε άρτια συνάρτηση έχει γραφική παράσταση με άξονα συμμετρίας τον ψ΄ψ.

Η συνάρτηση f:Α→Β λέγεται περιττή όταν για κάθε χεΑ ισχύουν :
-χεΑ και f(-χ)=-f(χ).

Παρατηρήσεις

Το πεδίο ορισμού μιάς περιττής συνάρτησης είναι διάστημα ή διαστήματα συμμετρικά ως προς το μηδέν.

Κάθε περιττή συνάρτηση έχει γραφική παράσταση με κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.

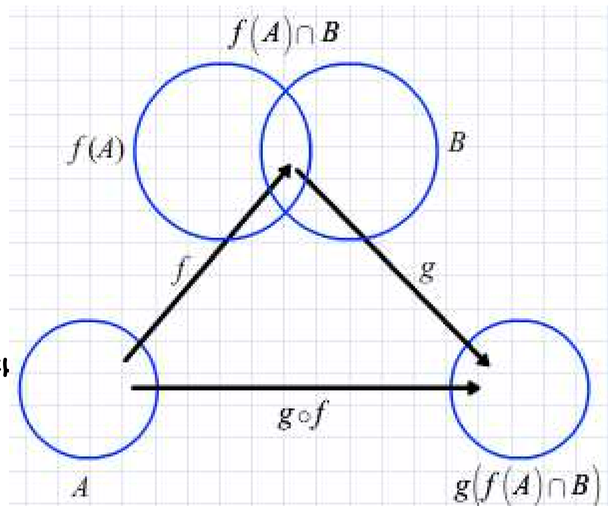
Αν f:Α→Β είναι περιττή συνάρτηση και 0εΑ τότε

f(0)=-f(0) ⇔ 2f(0)=0 ⇔ f(0)=0

που σημαίνει ότι η γραφική παράσταση της f περνά από το σημείο Ο(0,0).

6. Τι ονομάζουμε σύνθεση της f με την g.

Έστω οι συναρτήσεις f:A → R , g:B → R.
Θεωρούμε το σύνολο Α΄={ χεΑ: f(χ)εΒ } και έστω Α΄ ≠ ∅.



Στο χ του Α΄ αντιστοιχίζεται με την f ο αριθμός f(χ)εΒ, στο στοιχείο f(x) του Β αντιστοιχίζεται με την g ο αριθμός g(f(x)) τότε η συνάρτηση με την οποία σε κάθε χεΑ' αντιστοιχίζεται ο αριθμός g(f(x)) λέγεται συνθεση της f με την g και συμβολίζεται gof. Δηλαδή για κάθε χεΑ' με (gof)(x)=g(f(x)).

<u>**Σχόλια**</u>

Η σύνθεση των συναρτήσεων δεν είναι πάντα ορισμένη και :
Δεν είναι αντιμεταθετική gof≠fog(Υπάρχουν περιπτώσεις που ισχύει f(x)=x, g(x)=x.
Ειναι προσεταιριστική fo(goh)=(fog)oh.

7. Πότε μια συνάρτηση λέγεται"γνησίως αύξουσα συνάρτηση" και πότε "γνησίως φθίνουσα συνάρτηση" .

Εστω η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α και Δ ένα διάστημα του Α. Θα λέμε ότι:

Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ και θα συμβολίζουμε ↥ όταν για κάθε χ_1,χ_2 εΔ ισχύει : $\chi_1<\chi_2 \Rightarrow f(\chi_1)<f(\chi_2)$.

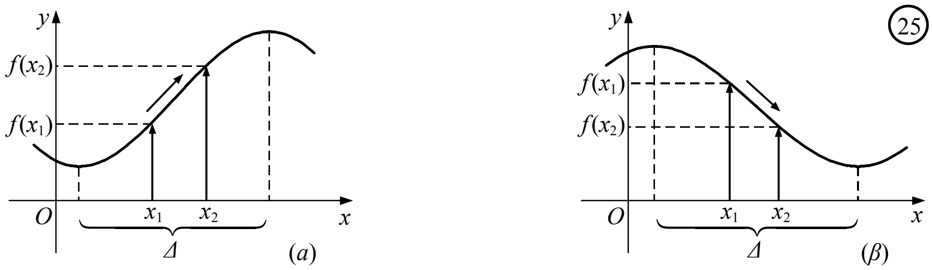
Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα Δ και θα συμβολίζουμε ↧ όταν για κάθε χ_1,χ_2 εΔ ισχύει : $\chi_1<\chi_2 \Rightarrow f(\chi_1)>f(\chi_2)$.

2007Ο

Η συνάρτηση f είναι αύξουσα στο διάστημα Δ και θα συμβολίζουμε ↑ όταν για κάθε χ_1,χ_2 εΔ ισχύει : $\chi_1<\chi_2 \Leftrightarrow f(\chi_1) \le f(\chi_2)$.

Η συνάρτηση f είναι φθίνουσα στο διάστημα Δ και θα συμβολίζουμε ↓ όταν για κάθε χ_1,χ_2 εΔ ισχύει : $\chi_1<\chi_2 \Leftrightarrow f(\chi_1) \ge f(\chi_2)$.

<u>**Με απόδειξη ισχύουν και τα αντίστροφα των παραπάνω.**</u>

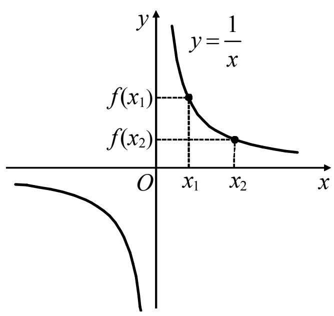


<u>**Σχόλια**</u>

Αλλάζουμε την φορά μιας ανίσωσης όταν:

- **Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της με αρνητικό αριθμό.**
- **Όταν αντιστρέφουμε τους όρους μιας ανίσωσης που αποτελείται από ομόσημα μέρη.**
- **Όταν υψώνουμε σε άρτια δύναμη όρους αρνητικούς μιας ανίσωσης.**

Μια συνάρτηση μπορεί να έχει το ίδιο είδος μονοτονίας σε δύο διαστήματα όχι όμως και στη ένωση των διαστημάτων.

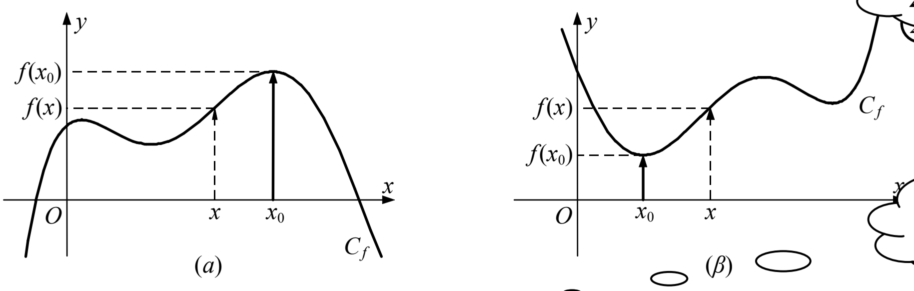


Παρατηρούμε ότι η $y=\frac{1}{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα κατά διαστήματα και όχι στην ένωση των διαστημάτων.

8. Τι ονομάζουμε “μέγιστο”, “ελάχιστο”, συνάρτησης

Εστω μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α και $\chi_0 \varepsilon A$, θα λέμε ότι:
Η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο στο χ_0 όταν για κάθε $\chi \varepsilon A$ είναι $f(\chi) \geq f(\chi_0)$.
Η τιμή $f(\chi_0)$ λέγεται ελάχιστο της συνάρτησης f.
Η συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστο στο χ_0 όταν για κάθε $\chi \varepsilon A$ είναι $f(\chi) \leq f(\chi_0)$.
Η τιμή $f(\chi_0)$ λέγεται μέγιστο της συνάρτησης f.

2004Ο - 2010Ε 2014



2003Ο –2005Ε 2012Ο – 2015Ε

9. Πότε μια συνάρτηση λέγεται 1-1

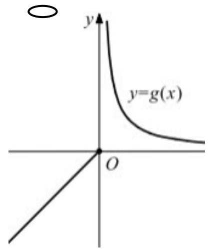
Μία συνάρτηση $f:A \to R$ λέγεται "1-1,, (ένα πρός ένα) όταν γιά κάθε χ_1, χ_2 ε Α με $\chi_1 \neq \chi_2$ είναι $f(\chi_1) \neq f(\chi_2)$ ή ισοδύναμα αν είναι $f(\chi_1) = f(\chi_2)$ τότε $\chi_1 = \chi_2$.

Σχόλια

Αν η συνάρτηση $f:A \to R$ είναι 1-1 **τότε για στοιχείο y του συνόλου τιμών της f υπάρχει μόνο ένα x ε A με y=f(x).**
Αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης με την ίδια τεταγμένη και επομένως κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει την γραφική παράσταση μιας συνάρτησης 1-1 το πολύ σ'ένα σημείο.
Για κάθε στοιχείο *y* του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x)=y$ έχει ακριβώς μια λύση ως προς *x*.

2018

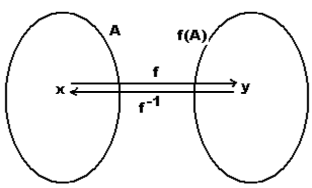
10. Κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση είναι συνάρτηση ΄1-1΄



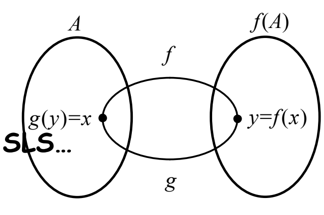
Το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει δηλαδή μπορεί η f να είναι ‘1-1» χωρίς να είναι γνησίως μονότονη.

Η συνάρτηση η συνάρτηση $g(x)=\begin{cases} x &, x \leq 0 \\ \frac{1}{x} &, x>0 \end{cases}$

11.Πως ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση



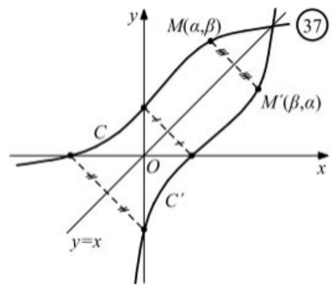
Έστω μια 1-1 συνάρτηση $f:A \to R$ με σύνολο τιμών f(A). Τότε ορίζεται μια νέα συνάρτηση από το f(A) στο A τέτοια ώστε, αν η f αντιστοιχίζει το x στο y, αυτή να αντιστοιχίζει το y στο x.Η συνάρτηση αυτή λέγεται αντίστροφη της f και συμβολίζεται με f^{-1}.
Επομένως ισχύει η ισοδυναμία: $y=f(x) \Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$



Σχόλιο: Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f, f(A) και σύνολο τιμών το πεδίο ορισμού A της f .

12. Δείξτε ότι οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.

Ας πάρουμε τώρα μια $1-1$ συνάρτηση f και ας θεωρήσουμε τις γραφικές παραστάσεις C και C' των f και της f^{-1} στο ίδιο σύστημα αξόνων .).
Επειδή $f(x)=y \Leftrightarrow f^{-1}(y)=x$,αν ένα σημείο $M(\alpha,\beta)$ ανήκει στη γραφική παράσταση C της f , τότε το σημείο $M'(\beta,\alpha)$ θα ανήκει στη γραφική παράσταση C' της f^{-1} και αντιστρόφως. Τα σημεία, όμως, αυτά είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$ $x'Oy'$. Επομένως:



Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y=x που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$

<u>Παρατήρηση</u>
Οι αντίστροφες συναρτήσεις έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας.
Επίσης $(f o f^{-1})(x)=f(f^{-1}(x))=x$, <u>$x \in f(A)$</u> και $(f^{-1} o f)(x)=f^{-1}(f(x))=x$, <u>$x \in A$</u>

<u>Προτάσεις με απόδειξη για να χρησιμοποιηθούν</u>

- **Οι συναρτήσεις f, f^{-1} αν υπάρχουν έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας.**
  Εστω f $\uparrow$ στο A τότε f «1-1» άρα υπάρχει η f^{-1} και ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν $y_1, y_2 \in f(A)$ με $y_1<y_2$ και $f^{-1}(y_1)>f^{-1}(y_2) \Rightarrow f(f^{-1}(y_1))>f(f^{-1}(y_2)) \Rightarrow y_1>y_2$, Ατοπο.
  άρα για κάθε $y_1, y_2 \in f(A)$ με $y_1<y_2$ και $f^{-1}(y_1)<f^{-1}(y_2)$, άρα $f^{-1}\uparrow$ στο f(A).
  Όμοια αν f γνησίως φθίνουσα.

- **Αν f $\uparrow$ τότε οι εξισώσεις $f(x)=f^{-1}(x)$ και $f(x)=x$ είναι ισοδύναμες (έχουν τις ίδιες λύσεις), δηλαδή τα κοινά σημεία των Cf, Cf^{-1} βρίσκονται πάνω στην y=x.**
  ►Εστω ότι υπάρχει $x_1 \in A$: $f(x_1)=f^{-1}(x_1)$ θα δείξω $f(x_1)=x_1$.
  Εστω ότι $f(x_1) \neq x_1$. Τότε $f(x_1)>x_1$ ή $f(x_1)<x_1$.
  Εστω $f(x_1)>x_1$, επειδή $f\uparrow \Rightarrow f^{-1}\uparrow$ τότε $f^{-1}(f(x_1))>f^{-1}(x_1) \Rightarrow x_1>f^{-1}(x_1) \Rightarrow x_1>f(x_1)$, Ατοπο
  Ομοια αν $f(x_1)<x_1$ καταλήγουμε σε Ατοπο. Αρα $f(x_1)=x_1$.

►Εστω ότι υπάρχει $x_1 \varepsilon A$: $f(x_1)= x_1$ θα δείξω $f(x_1)=f^{-1}(x_1)$).
Είναι $f(x_1)= x_1 \Rightarrow f^{-1}(f(x_1))= f^{-1}(x_1) \Rightarrow x_1= f^{-1}(x_1) \Rightarrow f(x_1)=f^{-1}(x_1)$.

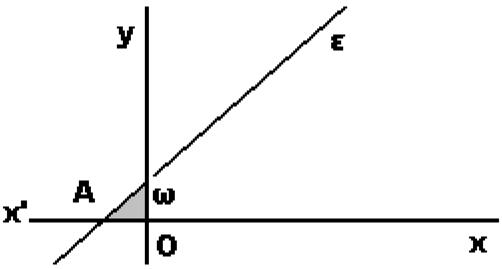
- **Αν f $\uparrow$ στο Δ τότε ισχύει η ισοδυναμία για κάθε $x_1,x_2 \varepsilon A$ $x_1<x_2 \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$**

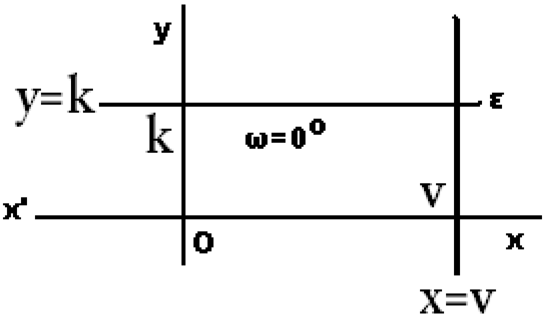
►Εστω ότι $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$ γιατί η **f** $\uparrow$.
►Είναι η **f** $\uparrow$ και $f(x_1)<f(x_2)$ θα δείξω ότι $x_1<x_2$.
Για τα x_1,x_2 μπορούν να ισχύουν:
1^o $x_1=x_2 \Rightarrow f(x_1)=f(x_2)$, Ατοπο.
2^o $x_1>x_2 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$, Ατοπο.
3^o $x_1<x_2$ άρα ισχύει.

<u>Γωνία ευθείας με τον χχ΄</u>

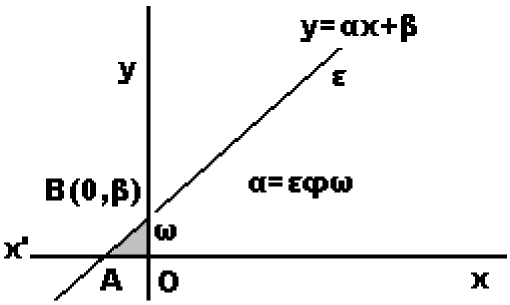
<u>Γωνία ω που σχηματίζει μιά ευθεία (ε) με τον χχ΄</u>, η οποία τον τέμνει στό Α, λέμε την γωνία που διαγράφει η ημιευθεία Αχ όταν στραφεί γύρω από το Α κατά την θετική φορά (κίνηση αντίθετη των δεικτών του ρολογιού) μέχρι να ταυτισθεί με την ευθεία (ε).

Αν η ευθεία είναι παράλληλη με τον χχ΄ τότε θα θεωρούμε ως γωνία ω = 0.





<u>Γραφική παράσταση της συνάρτησης f(χ)=α χ + β</u>

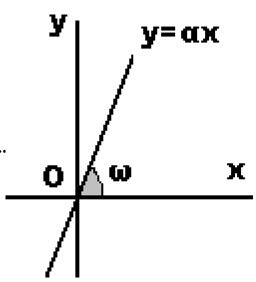


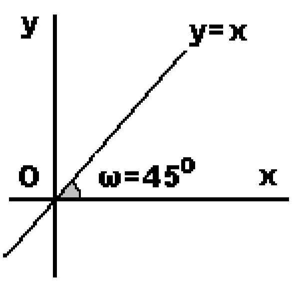
Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f(χ)=α χ + β είναι μία ευθεία με εξίσωση ψ=αχ+β, η οποία τέμνει τον ψ΄ψ στο σημείο (0,β) και σχηματίζει γωνία ω με τον χ΄χ τέτοια ώστε α=εφω. Ο αριθμός α λέγεται συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας (ε).

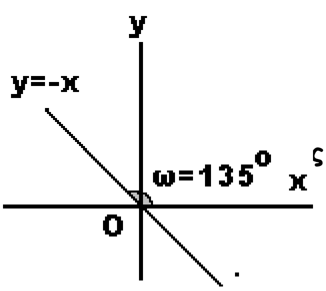
Αν $\alpha>0$ τότε $0^o<\omega<90^o$
Αν $\alpha<0$ τότε $90^o<\omega<180^o$
Αν $\alpha=0$ τότε $\omega=0^o$.

<u>Η ευθεία ψ=αχ</u>

Η ευθεία ψ=αχ διέρχεται από την αρχή αξόνων και έχει συντελεστή διεύθυνσης α. Ειδικότερα
Αν α=1, τότε έχουμε ψ=χ και εκφράζει την διχοτόμο του $1^{ου}$, $3^{ου}$ τεταρτημορίου.
Αν α=-1, τότε έχουμε ψ=-χ και εκφράζει την διχοτόμο του $2^{ου}$, $4^{ου}$ τεταρτημορίου.

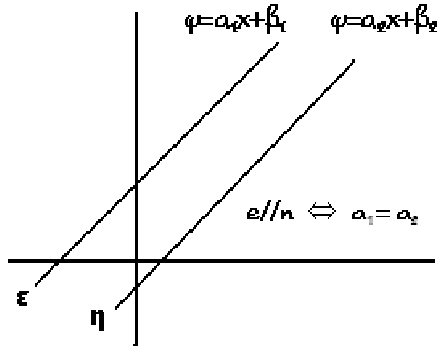


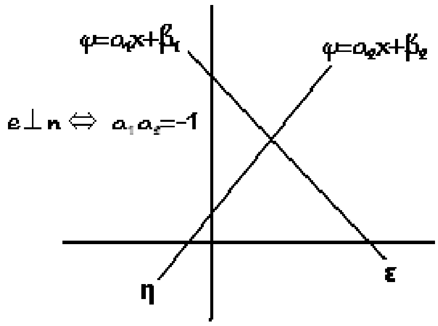




<u>Συνθήκες παραλληλίας και καθετότητας</u>

Οι διακεκριμένες ευθείες ε:ψ=α_1χ+β_1 και η:ψ=α_2χ+β_2 είναι παράλληλες αν καί μόνο αν οι συντελεστές διεύθυνσης αυτών είναι ίσες, δηλαδή ε//η $\Leftrightarrow$ $\alpha_1 = \alpha_2$.





Οι διακεκριμένες ευθείες ε:ψ=α_1χ+β_1 και η:ψ=α_2χ+β_2 είναι κάθετες αν και μόνο αν οι συντελεστές διεύθυνσης αυτών έχουν γινόμενο -1 , δηλαδή ε$\perp$η $\Leftrightarrow$ $\alpha_1\,\alpha_2$=-1.

1. Προσέχουμε πάντα τα χ για τα οποία ορίζεται μία συνάρτηση ή μία συναρτησιακή σχέση. Αν δεν μας δίνονται πρέπει να τα βρίσκουμε.
2. Η μονοτονία μιας συνάρτησης αναφέρεται σε κάποιο διάστημα ή σύνολο. Αν γράψουμε ότι η συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη, χωρίς να αναφέρουμε το σύνολο στο οποίο αυτό συμβαίνει, τότε θεωρούμε ότι η συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της.
3. Για το πεδίο ορισμού της $h(x) = f(g(x))$ λαμβάνουμε υπόψιν ότι $x \in D_g$ ώστε $g(x) \in D_f$.
4. Αν το σύνολο τιμών της $g(x)$ περιέχεται στο πεδίο ορισμού της $f(x)$ τότε το πεδίο ορισμού της $h(x) = f(g(x))$ συμπίπτει με το πεδίο ορισμού της $g(x)$.
5. Αν μας δίνεται ο τύπος $f(g(x)) = ...$ και γνωρίζουμε την $g(x)$ τότε κάνουμε αντικατάσταση… $g(x) = y \Leftrightarrow x = ...$ και βρίσκουμε τον τύπο της f (: $f(y) = ...$)
6. Αν μας δίνεται ο τύπος $f(g(x)) = ...$ και γνωρίζουμε την $f(x)$ τότε στην $f(x)$ βάζουμε όπου χ το $g(x)$ και εξισώνουμε τις δύο ισότητες $f(g(x)) = ...$ οι οποίες προκύπτουν ….. κατόπιν βρίσκουμε εύκολα την $g(x)$.
7. Αν οι f, g έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας τότε η σύνθεση της g με την f , δηλαδή η fog, είναι γνησίως αύξουσα. (Απόδειξη εύκολη με βάση τον ορισμό).
8. Αν οι f, g έχουν διαφορετικό είδος μονοτονίας τότε η σύνθεση της g με την f , δηλαδή η fog, είναι γνησίως φθίνουσα. (Απόδειξη εύκολη με βάση τον ορισμό).
9. Αν μια συνάρτηση είναι ***<u>γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της</u>*** τότε θα είναι και «1 – 1» οπότε θα ορίζεται η αντίστροφή της και επίσης : κάθε εξίσωση της μορφής $f(x) = k$ θα έχει το πολύ μια ρίζα στο πεδίο ορισμού της f .

10. ***<u>Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ και σε κάποιο χ_o του Δ μηδενίζει τότε στο σημείο αυτό θα αλλάζει πρόσημο.</u>***
Βρίσκουμε το πρόσημό της χρησιμοποιώντας τον ορισμό της μονοτονίας.

11. Η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της συνάρτησης f ορίζεται μόνο αν η f είναι «1-1» και έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών της f. Είναι γνησίως μονότονη, η f^{-1}, στο σύνολο τιμών της f αν η f είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της και έχει το ίδιο είδος μονοτονίας.
<u>Για κάθε y που ανήκει στο σύνολο τιμών της f υπάρχει μοναδικό x που ανήκει στο πεδίο ορισμού της f ώστε:</u> $f(x)=y \Leftrightarrow f^{-1}(y)=x$, εφόσον ορίζεται η f^{-1}.
   - $f(f^{-1}(x))=x$ Για κάθε x που ανήκει στο σύνολο τιμών της f, εφόσον ορίζεται η f^{-1}
   - $f^{-1}(f(x))=x$ Για κάθε x που ανήκει στο πεδίο ορισμού της f, εφόσον ορίζεται η f^{-1}

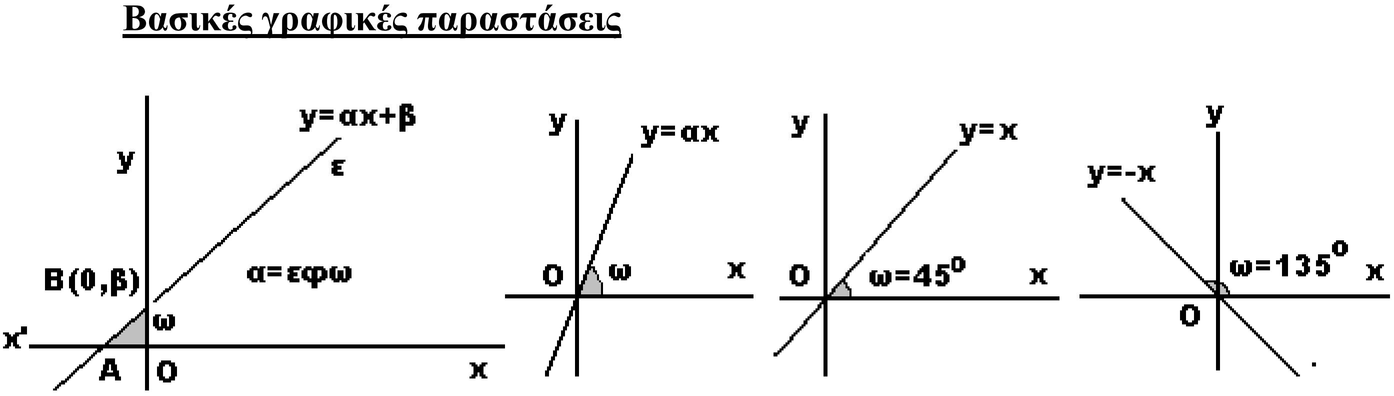
Οι γραφικές παραστάσεις των f, f^{-1}, εφόσον ορίζεται η f^{-1}, είναι συμμετρικές ως προς την διχοτόμο 1ου και 3ου τεταρτημορίου δηλαδή την ευθεία ψ=χ.
Το (χ_o , ψ_o) ανήκει στην γραφική παράσταση της f $\Leftrightarrow$ f (χ_o)=ψ_o και εφόσον η f αντιστρέψιμη , $\Leftrightarrow$ f^{-1} (ψ_o)=χ_o $\Leftrightarrow$ το (ψ_o , χ_o) ανήκει στην γραφική παράσταση της f^{-1}.
Βέβαια απαιτείται και χ_o στοιχείο του πεδίου ορισμού της f.
Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει την ψ=χ σε ένα σημείο τότε και η γραφική παράσταση της f^{-1} θα τέμνει την ψ=χ στο ίδιο σημείο.
<u>Οι γραφικές παραστάσεις των f, f^{-1} θα τέμνονται μόνο πάνω στην ψ=χ αν η f είναι γνησίως αύξουσα κάτι που δεν ισχύει αν η f δεν είναι γνησίως αύξουσα.</u>

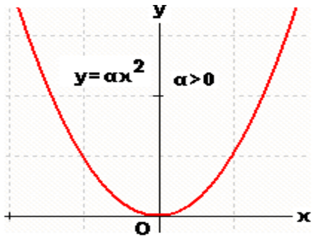
12. ***<u>Αν ένας αριθμός κ ανήκει στο σύνολο τιμών μιας συνάρτησης f τότε η εξίσωση $f(x)=k$ θα έχει ρίζα στο πεδίο ορισμού της f, υπάρχει χ_o στο πεδίο ορισμού της f ώστε:</u>*** $f(x_o)=k$

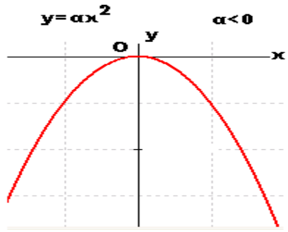
13. Από την ισότητα $f(\alpha)=f(\beta)$ μπορούμε να συμπεράνουμε α = β , εφόσον γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση f είναι «1-1» ή γνησίως μονότονη στο σύνολο όπου υπάρχουν τα α, β.

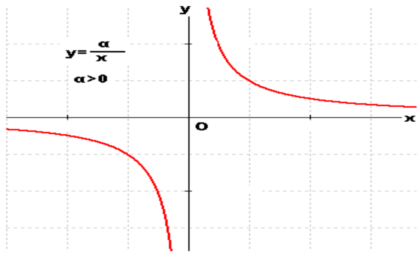
14. Όταν μια συνάρτηση δεν είναι «1-1» τότε υπάρχουν α, β στο πεδίο ορισμού της για τα οποία ισχύει $f(\alpha)=f(\beta)$ ενώ α ≠ β.

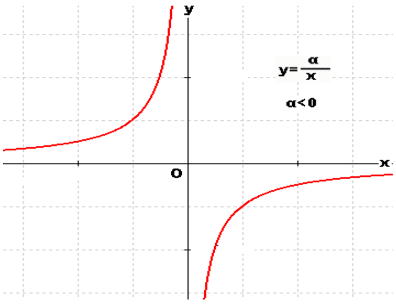
<u>Βασικές γραφικές παραστάσεις</u>

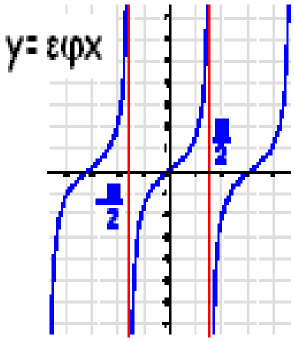


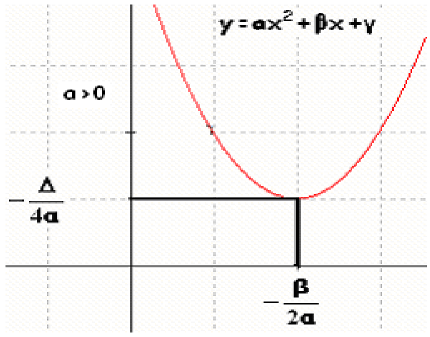


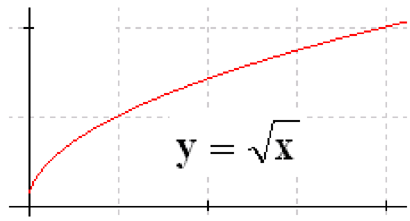




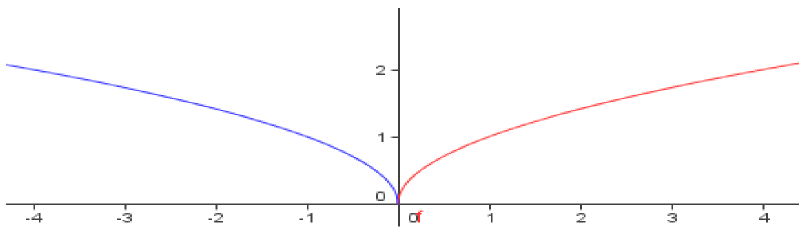


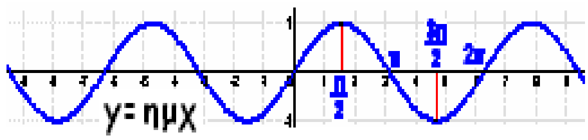


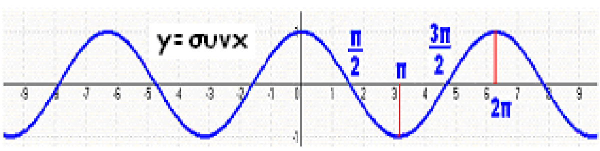


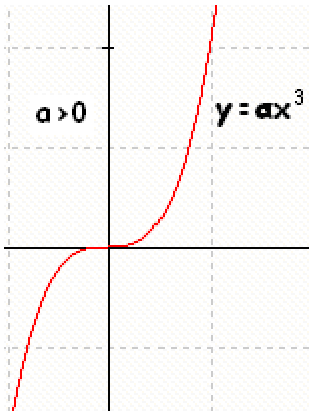


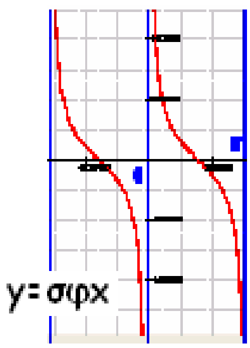
$y=\sqrt{|x|}$











<u>Απαντήστε αν είναι Σωστά ή Λάθος τα παρακάτω</u>

1. Αν οι συναρτήσεις f και g ορίζονται και οι δύο σε ένα σύνολο Α, τότε και η συνάρτηση S=f+g ορίζεται στο ίδιο σύνολο.
2. Αν οι συναρτήσεις f και g ορίζονται και οι δύο σε ένα σύνολο Α, τότε και η συνάρτηση $S=\frac{f}{g}$ ορίζεται πάντοτε ακριβώς στο ίδιο σύνολο.
3. Για κάθε συνάρτηση f, με $f(x)=\alpha x+\beta$, όπου $\alpha,\beta \in R$, ισχύει ότι: έχει σύνολο τιμών το R.

4. Για κάθε συνάρτηση f, με $f(x)=\alpha x+\beta$, όπου $\alpha,\beta \in R$, ισχύει ότι:
έχει γραφική παράσταση μια ευθεία, η οποία τέμνει και τους δύο άξονες συντεταγμένων.
5. Υπάρχει συνάρτηση $f: R \to R$, ώστε η C_f να τέμνει τον άξονα y΄y σε δύο διαφορετικά σημεία.
6. Υπάρχει συνάρτηση $f: R \to R$, ώστε η C_f να τέμνει τον άξονα x΄x σε "άπειρα" σημεία.
7. Ο κύκλος είναι γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{\rho^2-x^2}$, όπου ρ>0.
8. Η προβολή των σημείων της C_f στον άξονα y΄y δίνει το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.
9. Αν η εξίσωση f(x)=0 είναι αδύνατη, τότε η C_f τέμνει τον άξονα x΄x τουλάχιστον σε ένα σημείο.
10. Η C_f, μιας συνάρτησης f, που είναι γνησίως αύξουσα στο R, τέμνει τον άξονα x΄x το πολύ σε ένα σημείο.
11. Η γραφική παράσταση κάθε συνάρτησης $f: R \to R$ τέμνει τον άξονα $x'x$ σε πεπερασμένο πλήθος σημείων.
12. Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g, με $f(x)=e^{x}$ και $g(x)=e^{-x}$, είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα $y'y$.
13. Αν η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $(0,+\infty)$, τότε και η συνάρτηση g, με $g(x)=\frac{1}{f(x)}$, έχει πεδίο ορισμού το $(0,+\infty)$.
14. Όλες οι ευθείες έχουν συντελεστή διεύθυνσης.
15. Μια ευθεία κάθετη στον άξονα yy΄ έχει συντελεστή διεύθυνσης α=0.
16. Δύο ευθείες που έχουν ίσους συντελεστές διεύθυνσης είναι παράλληλες.
17. Η ευθεία y=2004 έχει συντελεστή διεύθυνσης α=2004.
18. Η ευθεία y=λχ+κ περνά από την αρχή των αξόνων μόνο αν κ=0.
19. Η ευθεία y=λχ περνά από την αρχή των αξόνων μόνο αν το λ είναι διάφορο του 0.
20. Οι ευθείες y=12χ+2004 και y=12 δεν μπορούν να είναι παράλληλες.
21. Δύο ευθείες είναι παράλληλες μόνο αν έχουν ίσους συντελεστές διεύθυνσης.
22. Για την ευθεία y=αχ+β, αν α>0, τότε $0<\omega<45^0$.
23. Η ευθεία y=αχ+β, όταν είναι ω=0 ισούται με y=β.
24. Η ευθεία y=-χ διχοτομεί τη γωνία του $1^{ου}$ τεταρτημορίου.
25. Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f μπορεί να περνά από τα σημεία (1,3) και (1,2).
26. Αν οι συναρτήσεις f και g τέμνονται στο σημείο με συντεταγμένες (κ,λ), τότε ισχύει f(κ)=g(κ)=λ.
27. Μια συνάρτηση γνησίως μονότονη είναι πάντα γνησίως αύξουσα.
28. Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της όταν για οποιαδήποτε $\chi_1, \chi_2 \epsilon \Delta$ με $\chi_1>\chi_2$ ισχύει $f(\chi_1)<f(\chi_2)$.
29. Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της όταν για οποιαδήποτε $\chi_1, \chi_2 \epsilon \Delta$ με $\chi_1>\chi_2$ ισχύει $f(\chi_1)<f(\chi_2)$.
30. Για κάθε συνάρτηση f, με $f(x)=\alpha x+\beta$, όπου $\alpha,\beta \in R$, ισχύει ότι: αν $\alpha \neq 0$, είναι γνησίως μονότονη στο R.

31. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα, τότε η –f είναι γνησίως φθίνουσα.
32. Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα, τότε η f^2 είναι γνησίως αύξουσα.
33. Η συνάρτηση $f(x)=\frac{2}{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της.
34. Οι συναρτήσεις f,g είναι γνησίως αύξουσα και γνησίως φθίνουσα στο R αντίστοιχα τότε η fog είναι γνησίως αύξουσα.
35. Η $g(x)=\frac{1}{f(x)}$ με f(x)<0 είναι γνησίως αύξουσα αν η f είναι γνησίως φθίνουσα
36. Ισχύει ότι: $(f \circ f^{-1})(x)=x$, για κάθε x στο σύνολο τιμών της f.
37. Αν οι συναρτήσεις f,g $R \to R$ είναι «1-1» τότε και η fog είναι «1-1».
38. Αν για την f ισχύει (fof)(x)=3x-2 στο R τοτε f(1)=0.
39. Για κάθε συνάρτηση f, με $f(x)=\alpha x+\beta$, όπου $\alpha, \beta \in R$, ισχύει ότι:
    είναι αντιστρέψιμη.
40. Αν η συνάρτηση f: $(0,+\infty) \to R$ είναι ¨1-1¨, τότε η εξίσωση $f(e^{x^2-1})=f(e^3)$ έχει δύο λύσεις.
41. Αν η συνάρτηση f: $R \to R$ είναι ¨1-1¨, τότε το σχήμα των C_f και C_{f-1} έχει άξονα συμμετρίας.
42. Η συνάρτηση f: $R \to R$ είναι ¨1-1¨, όταν κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη C_f σε ένα ακριβώς σημείο.
43. Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι ίδιο με το πεδίο ορισμού της f.
44. Αν η f είναι 1-1, τότε η εξίσωση f(x)=0 έχει το πολύ μια ρίζα.
45. Αν η f είναι 1-1, είναι και γνησίως μονότονη.
46. Αν η συνάρτηση f είναι 1-1, τότε ισχύει ότι: $f(x)=f(y) \Leftrightarrow x=y$, για κάθε $x, y \in D_f$.
47. Αν μια συνάρτηση είναι άρτια τότε είναι και «1-1».
48. Αν μια συνάρτηση f είναι “1-1” και περιττή τότε και η f^{-1} είναι περιττή.
49. Αν μια συνάρτηση f είναι περιττή και έχει μέγιστο τότε θα έχει και ελάχιστο.
50. Αν η συνάρτηση f είναι άρτια, τότε η συνάρτηση –f είναι περιττή.
51. Αν για τη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού τον R ισχύει ότι f(x)+f(-x)=0, τότε η f είναι περιττή.
52. Οι συναρτήσεις f,g είναι γνησίως φθίνουσες στο R τότε η fog είναι γνησίως αύξουσα.
53. Αν (fofof)(x)-(fof)(x)=2004x τότε f(0)=0.
54. Αν η f είναι γνησίως μονότονη, τότε: $f(x)<f(y) \Leftrightarrow x<y$.
55. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα, τότε η –f είναι γνησίως φθίνουσα.
56. Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα, τότε η f^2 είναι γνησίως αύξουσα.
57. Κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση είναι και 1-1.
58. Η συνάρτηση f(χ)==-1821χ+1 είναι γνησίως φθίνουσα.
59. Η συνάρτηση f(χ)=2004χ-10 είναι γνησίως αύξουσα.
60. Η σύνθεση δύο συναρτήσεων, που έχουν κοινό πεδίο ορισμού το R και είναι ¨1-1¨, είναι
    επίσης ¨1-1¨.
61. Υπάρχει συνεχής συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού ένα διάστημα Δ, αλλά το σύνολο τιμών της δεν είναι διάστημα.

62. Η συνάρτηση $\mathbf{f(x)=\alpha x+\beta}$, με $\alpha,\beta \in R$, είναι γνησίως μονότονη.
63. Οι ανισώσεις $\frac{\mathbf{A\,(x)}}{\mathbf{B\,(x)}} > \mathbf{0}$ και Α(χ) Β(χ)>0 είναι ισοδύναμες.
64. Η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(\chi)=\chi^2-8\chi+12$ είναι 4.
65. Η συνάρτηση $f(\chi)=\chi^2+4\chi+5$ έχει μέγιστο το 1.
66. Η συνάρτηση $f(\chi)=\chi^2+4\chi+5$ παρουσιάζει μέγιστο στο -2.
67. Αν για το τριώνυμο $f(\chi)=\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma<0$ για κάθε χεR τότε α<0.
68. Αν $f(\chi)=-\chi^2+2\chi+3$, τότε : f(20202020202)>0.
69. Αν για το τριώνυμο $f(\chi)=\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$ ισχύει: αf(2002)<0, τότε αυτό έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.
70. Το τριώνυμο $f(\chi)=-\chi^2+\chi-1$ διατηρεί το πρόσημό του για κάθε χεR.
71. Η ανίσωση $(\chi^2-4)(\chi^2-\chi)(\chi^2+\chi+1)>0$ είναι ισοδύναμη με την $(4\chi-\chi^3)(1-\chi)>0$.
72. Το πεδίο ορισμού της $\mathbf{f(x)=\frac{2004}{\sqrt{x^3-x^2-x+1}}}$ είναι το (-1,-∞).
73. Το πεδίο ορισμού της $\mathbf{f(x)=\frac{x}{2016}}$ είναι το R-{2016}
74. Για κάθε περιττή συνάρτηση f ισχύει ότι f(0)=0.
75. Η γραφική παράσταση μιάς περιττής συνάρτησης έχει άξονα συμμετρίας τον yy΄.
76. Κάθε σταθερή συνάρτηση ορισμένη στο R είναι άρτια.
77. Για να ορίζεται το πηλίκο δύο συναρτήσεων το πεδίο ορισμού της είναι η τομή των πεδίων ορισμών.
78. Η γραφική παράσταση της $|\mathbf{f(x)}|$ είναι πάνω από τον x’x.
79. Μια «1-1» συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη.
80. Ισχύει πάντα fog=gof αν ορίζονται οι συναρτήσεις.
81. Ισχύει πάντα (fo(goh))=((fog)oh) αν ορίζονται οι συναρτήσεις.
82. Αν f είναι γνησίως μονότονη στα Δ_1,Δ_2 με το ίδιο είδος μονοτονίας, τότε θα είναι και στο $\Delta_1 U \Delta_2$.
83. Κάθε «1-1» είναι γνησίως μονότονη.
84. Κάθε «1-1» και συνεχής συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη.
85. Αν η f δεν είναι «1-1» συνάρτηση τότε δεν είναι γνησίως μονότονη.
86. Αν η f είναι άρτια τότε είναι «1-1».
87. Αν υπάρχει η f^{1} τότε η f δεν είναι «1-1».
88. Οι γραφικές παραστάσεις των f^{1} και f είναι συμμετρικές ως προς την y=-x.
89. Κάθε γνησίως μονότονη έχει το πολύ μια ρίζα.
90. Κάθε γνησίως μονότονη έχει πάντα ακριβώς μια ρίζα.
91. Αν $f^2(x)=f(x)g(x)$ τότε πάντα f(x)=0 ή f(x)=g(x).
92. Αν $f^2(x)=2exf(x)$ τότε μόνο $f(x)=2e^x$.
93. Αν η εξίσωση f(x)=k έχει μοναδική λύση τότε η f είναι «1-1».
94. Αν f:A→f(A) τότε $f(f^{1}(x))=x$ για κάθε xεA.
95. Η σταθερή συνάρτηση f(x)=c≠0 έχει αντίστροφη την $\mathbf{g(x)=\frac{1}{c}}$.
96. Οι συναρτήσεις f και $(f^{1})^{-1}$ είναι ίσες.
97. Αν η f γνησίως φθίνουσα τα κοινά σημεία των f και f^{1} βρίσκονται μόνο στην y=x.

98. Αν ορίζεται η fog και είναι «1-1» τότε και η g είναι «1-1».
99. Αν ορίζεται η fog και η g είναι «1-1» τότε και η fog είναι «1-1».
100. Κάθε τοπικό ελάχιστο είναι μικρότερο από κάθε τοπικό μέγιστο.
101. Τα τοπικά ακρότατα είναι ολικά ακρότατα.
102. Τα ολικά ακρότατα είναι τοπικά ακρότατα.
103. Το μεγαλύτερο από τα τοπικά ακρότατα είναι το μέγιστο της συνάρτησης.
104. Στο [α,β] για την συνάρτηση f υπάρχει πάντα ακρότατο.
105. Αν το π.ο της f είναι το (α,β) τότε η f δεν έχει ακρότατα.
106. Αν το π.ο της f είναι το [α,β] τότε η f έχει ακρότατα.
107. Αν το π.ο της f είναι το [α,β] και είναι συνεχής τότε η f δεν έχει ακρότατα.
108. Σε κάθε «1-1» συνάρτηση κάθε οριζόντια ευθεία το πολύ σε ένα σημείο τέμνει την γραφική παράσταση της συνάρτησης.
109. Στο [α,β] για την παραγωγίσιμη συνάρτηση f υπάρχει πάντα ακρότατο.
110. Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο [α,β] και υπάρχει ακρότατο στο x_oε[α,β] τότε $f\,'(x_o)=0$.
111. Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο [α,β] και υπάρχει ακρότατο στο x_oε(α,β) τότε $f\,'(x_o)=0$.
112. Για την συνεχή συνάρτηση f στο [α,β] και υπάρχει ακρότατο στο x_oε(α,β) τότε $f\,'(x_o)=0$.
113. Αν το (α,β) είναι το σύνολο τιμών της f τότε δεν έχει ακρότατα.

Συνοπτική Ανάπτυξη Ορίων

<table>
<tr><td rowspan="15">ΠΡΟΣΟΧΗ ΣΤΗΝ ΘΕΩΡΙΑ ΓΙΑ ΤΟ ΣΗΜΕΙΟ ΣΥΣΣΩΡΕΥΣΗΣ</td><td rowspan="10">$\lim\limits_{x\to x_o} f(x), x_o \varepsilon R$</td><td>Το x_oε Π.Ο</td><td>Αντικατάσταση</td></tr>
<tr><td rowspan="4">$\frac{0}{0}$</td><td>Horner</td></tr>
<tr><td>Συζυγή</td></tr>
<tr><td>$α^ν - β^ν = (α-β)(α^{ν-1}+α^{ν-2}β+α^{ν-3}β^2+\ldots+β^ν)$</td></tr>
<tr><td>Hospitall</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\frac{a}{0}$</td><td>ν-άρτιος</td></tr>
<tr><td>ν-περιττός (περιπτώσεις)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">τριγωνομετρικές</td><td>$\lim\limits_{x\to 0}\frac{ημx}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{εφx}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{συνx-1}{x}=0$</td></tr>
<tr><td>Μηδενική επί φραγμένη</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td rowspan="5">$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$</td><td colspan="2">Πολυωνυμικές</td></tr>
<tr><td colspan="2">Κλασματικές πολυωνυμικές</td></tr>
<tr><td colspan="2">Άρρητες με πράξεις</td></tr>
<tr><td colspan="2">Άρρητες προβληματικές (Συζυγή, $α^ν - β^ν$)</td></tr>
<tr><td></td><td>x→+∞</td></tr>
</table>

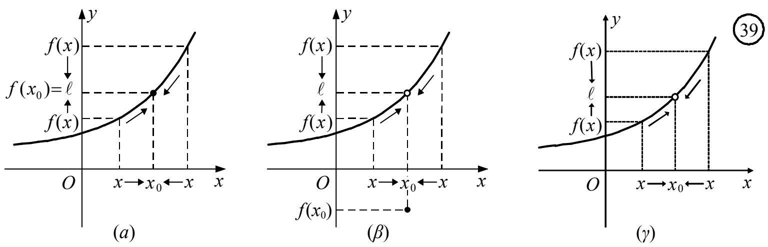
		εκθετικές	βγάζω κοινό παράγοντα την μεγαλύτερη βάση
			x→-∞ βγάζω κοινό παράγοντα την μικρότερη βάση
			Γενικά με σχήμα
		Λογαριθμικές	Υπολογίζω εσωτερικά την παράσταση και μετά με σχήμα
		τριγωνομετρικές	Μηδενική επί φραγμένη
			Νταβανοπάτωμα κατασκευαστικά

Σχόλια στα όρια

Για να αναζητήσουμε το όριο της f στο x_0, πρέπει η f να ορίζεται όσο θέλουμε "κοντά στο x_0", δηλαδή η f να είναι ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$ ή (α,x_0) ή (x_0,β).

Το x_0 μπορεί να ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης (Σχ. 39α, 39β) ή να μην ανήκει σ' αυτό .

Η τιμή της f στο x_0, όταν υπάρχει, μπορεί να είναι ίση με το όριό της στο x_0 (Σχ. 39α) ή διαφορετική από αυτό.



Γενικές Ιδιότητες των ορίων

1. **Αν μια συνάρτηση έχει όριο στο χ_0 αυτό είναι μοναδικό.**
2. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l \iff \lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)-l\right) = 0$
3. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l \iff \lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h) = l$
4. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l \iff \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = l$

   Ποια πρόταση συνδέει το όριο της f στο x_o και τα πλευρικά όρια της f στο x_o;

   Απάντηση

   Ισχύει ότι : Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, τότε ισχύει η ισοδυναμία: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell \iff \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\ell$

   Τους αριθμούς $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ τους λέμε πλευρικά όρια της f στο x_0 και συγκεκριμένα αριστερό και δεξιό όριο της f αντίστοιχα.
5. $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$

6. $\lim\limits_{x\to x_0} c = c$

Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f έχει κοντά στο x_o μια ιδιότητα Ρ ;

Μια συνάρτηση f λέμε ότι έχει κοντά στο x_0 μια ιδιότητα Ρ, όταν ισχύει μια από τις παρακάτω τρεις συνθήκες:

α) Η f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$ και στο σύνολο αυτό έχει την ιδιότητα Ρ.

β) Η f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής (α,x_0), έχει σ' αυτό την ιδιότητα Ρ, αλλά δεν ορίζεται σε σύνολο της μορφής (x_0,β).

γ) Η f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής (x_0,β), έχει σ' αυτό την ιδιότητα Ρ, αλλά δεν ορίζεται σε σύνολο της μορφής (α,x_0).

7. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) > 0 \Rightarrow f(x) > 0$ **κοντά στο χ_0. <u>(πρόσημο συναρτήσεων και όρια)</u>**

(Αν f(x)>0 κοντά στο χ_0 τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \geq 0$)

8. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) < 0 \Rightarrow f(x) < 0$ **κοντά στο χ_0.**

9. $f(x) \leq g(x) \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \leq \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ **κοντά στο χ_0. <u>(διάταξη και όρια)</u>**

10. **<u>Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο χ_0 τότε</u>:**

$\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ **<u>(πράξεις συναρτήσεων και όρια)</u>**

11. $\lim\limits_{x\to x_0} [k\ f(x)] = k \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ **για κάθε σταθερά κεR.**

12. $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)\, g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

13. $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$

14. $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = \left|\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right|$

15. $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}$, **εφόσον $f(x) \geq 0$ κοντά στο χ_0.**

16. $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)]^{\nu} = \left[\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right]^{\nu}$ **με νεN*.**

17. $\lim\limits_{x\to x_0} x^{\nu} = x_0^{\nu}$

13.Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο χ_0 τότε:

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x\to x_0}[k\ f(x)] = k \lim_{x\to x_0} f(x)$$ για κάθε σταθερά κεR.

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)\,g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) \lim_{x\to x_0} g(x)$$

Το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει δηλαδή μπορεί να υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$ χωρίς να υπάρχουν τα $\lim\limits_{x\to x_0} f(x), \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

14.Όριο πολυωνύμου $\lim\limits_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$.

Έστω τώρα το πολυώνυμο $P(x)=\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots+\alpha_1 x+\alpha_0$ και $x_0 \in R$.

Σύμφωνα με τις παραπάνω ιδιότητες έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0} P(x) = \lim_{x\to x_0}(\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots+\alpha_0) = \lim_{x\to x_0}(\alpha_\nu x^\nu) + \lim_{x\to x_0}(\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1})+\cdots+\lim_{x\to x_0}\alpha_0 = \alpha_\nu \lim_{x\to x_0} x^\nu + \alpha_{\nu-1}\lim_{x\to x_0} x^{\nu-1}+\cdots+\lim_{x\to x_0}\alpha_0$$

$= \alpha_\nu x_0^\nu + \alpha_{\nu-1}x_0^{\nu-1}+\cdots+\alpha_0 = P(x_0)$.Επομένως $\lim\limits_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$.

15. Όριο ρητής συνάρτησης $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}$, εφόσον $Q(x_0)\neq 0$

Έστω η ρητή συνάρτηση $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, όπου $P(x)$, $Q(x)$ πολυώνυμα του x και $x_0 \in R$ με $Q(x_0)\neq 0$. Τότε, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} P(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} Q(x)} = \dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}$.

Επομένως, $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}$, εφόσον $Q(x_0)\neq 0$

16. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής

Έστω οι συναρτήσεις f,g,h. Αν

2016Ε

- $h(x)\le f(x)\le g(x)$ κοντά στο x_0 και
- $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \ell$,

Τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$.

17. Τι ονομάζουμε ακολουθία (α_ν) και πότε θα λέμε ότι έχει όριο το lεR

Ακολουθία ονομάζεται κάθε πραγματική συνάρτηση α:N*→R.

Θα λέμε ότι η ακολουθία (α_ν) έχει όριο το $\ell \in \mathbb{R}$ και θα γράφουμε $\lim_{\nu\to\infty}\alpha_\nu = \ell$, όταν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\nu_0 \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο, ώστε για κάθε $\nu > \nu_0$ να ισχύει

$$|\alpha_\nu - \ell| < \varepsilon$$

Σχόλιο: Πώς υπολογίζουμε το όριο της σύνθετης συνάρτησης $f \circ g$ στο x_0;
Αν θέλουμε να υπολογίσουμε το όριο της σύνθετης συνάρτησης $f \circ g$ στο σημείο x_0, δηλαδή το $\lim_{x\to x_0} f(g(x))$, τότε εργαζόμαστε ως εξής:

1. Θέτουμε $u = g(x)$.
2. Υπολογίζουμε (αν υπάρχει) το $u_0 = \lim_{x\to x_0} g(x)$ και
3. Υπολογίζουμε (αν υπάρχει) το $\ell = \lim_{u\to u_0} f(u)$.

Αν $g(x) \neq u_0$ κοντά στο x_0, τότε το ζητούμενο όριο είναι ίσο με ℓ, δηλαδή ισχύει:

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = \lim_{u\to u_0} f(u)$$

1. **Αν η συνάρτηση f είναι μηδενική στο x_0 ($\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$) και η g φραγμένη σε μια περιοχή του x_0, τότε και η fg είναι μηδενική στο x_0.**
2. **Αν είναι $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ και $|g(x)| \leq |f(x)|$ σε μια περιοχή του x_0, τότε και $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$**
3. **Ισχύει ότι $|\eta\mu x| \leq |x| \quad \forall\ x \in \mathbb{R}$**
4. **Ισχύει ότι $\eta\mu x \leq x \leq \varepsilon\varphi x \quad \forall x \in [0, \frac{\pi}{2})$**
5. **Ισχύει ότι $|\eta\mu x| \leq |x| \leq |\varepsilon\varphi x| \quad \forall x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$**
6. **Ισχύει ότι $\lim_{x\to 0} \eta\mu x = 0$ και $\lim_{x\to 0} \sigma\upsilon\nu x = 1$** .
7. $\lim_{x\to x_0} \eta\mu x = \eta\mu x_0$ και $\lim_{x\to x_0} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x_0$
8. $\lim_{x\to 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$, $\lim_{x\to 0} \frac{\varepsilon\varphi x}{x} = 1$, $\lim_{x\to 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0$, $\lim_{x\to 0} \frac{\eta\mu(kx)}{kx} = 1$
9. **Οριο σύνθετης συνάρτησης**
   $\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = \lim_{u\to u_0} f(u)$ **όπου u=g(x) και** $u_0 = \lim_{x\to x_0} g(x)$ **με** $g(x) \neq u_o$ **κοντά στο x_0.**
10. $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \Rightarrow f(x) > 0$ **κοντά στο χ_0.**

11. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty \Rightarrow f(x) < 0$ κοντά στο χ_0.

12. $f(x) \leq g(x)$ και $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$ 

13. $f(x) \leq g(x)$ και $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

14. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} [-f(x)] = -\infty$

15. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} [-f(x)] = +\infty$

16. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0$

17. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0,\ f(x) > 0$ κοντά στο $x_0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$

18. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0,\ f(x) < 0$ κοντά στο $x_0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = -\infty$

19. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = +\infty$

20. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[k]{f(x)} = +\infty$

21. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$ και $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^{2\nu}} = +\infty$

22. $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ και $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^{2\nu+1}} = +\infty$

18. $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$ και $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x^{2\nu+1}} = -\infty$

Το όριο της f είναι	αεR	αεR	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
Το όριο της g είναι	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Τότε το όριο της f+g είναι	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	;	;

Το όριο της f είναι	α>0	α<0	α>0	α<0	0	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Το όριο της g είναι	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
Τότε το όριο της f g είναι	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	;	;	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Απροσδιόριστες μορφές

$(+\infty)-(+\infty)$, $0(\pm\infty)$, $1^{\pm\infty}$, 0^0, $(\pm\infty)^0$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $\frac{\pm\infty}{0}$

<u>Ορια Συνάρτησης στο άπειρο</u>

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\nu = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^\nu} = 0$

2. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^\nu = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } \nu \text{ αρτιος} \\ -\infty, & \text{αν } \nu \text{ περιτος} \end{cases}$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^\nu} = 0$

Για τα όρια στο $+\infty$, $-\infty$ ισχύουν οι γνωστές ιδιότητες των ορίων στο χ_0 με την προυπόθεση ότι οι συναρτήσεις είναι ορισμένες σε κατάλληλα σύνολα και δεν καταλήγουν σε απροσδιόριστη μορφή.

3. $P(\chi)=\alpha_\nu \chi^\nu+\alpha_{\nu-1}\chi^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1\chi+\alpha_0$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (\alpha_\nu x^\nu)$,

   $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (\alpha_\nu x^\nu)$

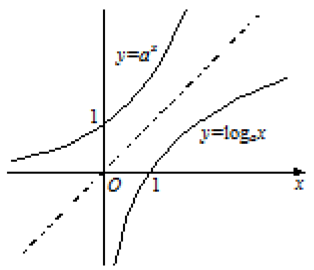
4. $f(x) = \dfrac{\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0}{\beta_k x^k + \beta_{k-1}x^{k-1} + \ldots + \beta_1 x + \beta_0}$, $\alpha_\nu \neq 0$, $\beta_k \neq 0$

   τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (\dfrac{\alpha_\nu x^\nu}{\beta_k x^k})$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (\dfrac{\alpha_\nu x^\nu}{\beta_k x^k})$

5. **Αν α>1 τότε**

   $\lim\limits_{x\to-\infty} \alpha^x = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha^x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to0} \log_\alpha x = -\infty$,

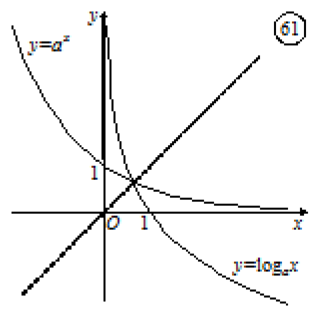
   $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_\alpha x = +\infty$



6. **Αν 0<α<1 τότε**

   $\lim\limits_{x\to-\infty} \alpha^x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha^x = 0$, $\lim\limits_{x\to0} \log_\alpha x = +\infty$,

   $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_\alpha x = -\infty$



7. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$, $1+x \le e^x \le 1+xe^x$,

   $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\ln x}{x-1} = 1$, $\ln x \le x-1$.

Σχόλια

- *Για να αναζητήσουμε το όριο μιας συνάρτησης f στο* $+\infty$, *πρέπει η f να είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής* $(\alpha,+\infty)$.
- *Για να αναζητήσουμε το όριο μιας συνάρτησης f στο* $-\infty$ *πρέπει η f να είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής* $(-\infty,\beta)$.

● *Για τα όρια στο* $+\infty$, $-\infty$ *ισχύουν οι γνωστές ιδιότητες των ορίων στο* x_0 *με την προϋπόθεση ότι:* — *οι συναρτήσεις είναι ορισμένες σε κατάλληλα σύνολα και*
— *δεν καταλήγουμε σε απροσδιόριστη μορφή*

2001Ο – 2006Ο – 2009Ε -2010Ο 2015

18. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0.

Εστω μια συνάρτηση f και χ_0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο χ_0 , όταν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Σχόλια

α) Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 *του πεδίου ορισμού της όταν:*

i) Δεν υπάρχει το όριό της στο x_0 *ή*

ii) Υπάρχει το όριό της στο x_0, *αλλά είναι διαφορετικό από την τιμή της,* $f(x_0)$, *στο σημείο* x_0.

β) Μία συνάρτηση f που είναι συνεχής σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της, θα λέγεται, συνεχής συνάρτηση.

γ) — *Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση P είναι συνεχής, αφού για κάθε* $x_o \varepsilon R$ *ισχύει* $\lim\limits_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$.

— *Κάθε ρητή συνάρτηση* $\frac{P}{Q}$ *είναι συνεχής, αφού για κάθε* x_0 *του πεδίου ορισμού της ισχύει* $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$.

— *Οι συναρτήσεις* $f(x) = \eta\mu x$ *και* $g(x) = \sigma\upsilon\nu x$ *είναι συνεχείς, αφού για κάθε* $x_0 \in \mathbb{R}$ *ισχύει* $\lim\limits_{x \to x_0} \eta\mu x = \eta\mu x_0$ *και* $\lim\limits_{x \to x_0} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x_0$.

— *Οι συναρτήσεις* $f(x) = \alpha^x$ *και* $g(x) = \log_\alpha x$, $0 < \alpha \neq 1$ *είναι συνεχείς.*

19.Πότε μια συνάρτηση είναι συνεχής στο Af

Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι **συνεχής** στο πεδίο ορισμού της , όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του Af.

20 .Πότε μια συνάρτηση είναι συνεχής στο (α,β)

Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β), όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α,β).

2001Ο – 2004Ε 2008 - 2012 2015Ο - 2017

21.Πότε μια συνάρτηση είναι συνεχής στο [α,β]

Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [α,β], όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α,β) και επιπλέον $\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x) = f(\alpha)$, $\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x) = f(\beta)$.

<u>Παρατηρήσεις</u>

1. Αν f,g είναι συνεχής στο x_o και c∈R τότε είναι συνεχής στο x_o με την προυπόθεση ότι ορίζονται σε ένα διάστημα που περιέχει το x_o οι συναρτήσεις: f+g, cf, fg, f/g, $|f|$, $\sqrt{f}$.
2. Αν η f είναι συνεχής στο x_o και η <u>g συνεχής στο f(x_o)</u> τότε η σύνθεση της gof είναι συνεχής στο x_o .
3. Αν η f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σε αυτό, τότε διατηρεί σταθερό πρόσημο στο Δ.
4. Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο σε κάθε ένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

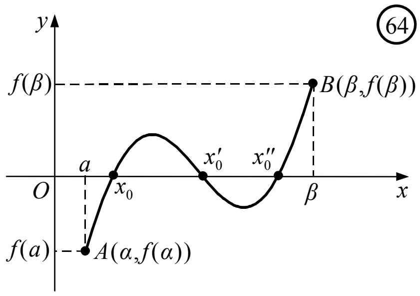
2013Ο – 2014Ε

22. Να διατυπώστε το Θεώρημα του Bolzano και ποια η γεωμετρική του σημασία;

Εστω μια συνάρτηση f, ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α,β]. Αν

- Η f είναι συνεχής στο [α,β] και επιπλέον ισχύει
- f(α) f(β)<0

τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον χ_0ε(α,β) τέτοιο ώστε f(χ_0)=0. Δηλαδή υπάρχει μια τουλάχιστον, ρίζα της εξίσωσης f(χ)=0 στο ανοικτό διάστημα (α,β).

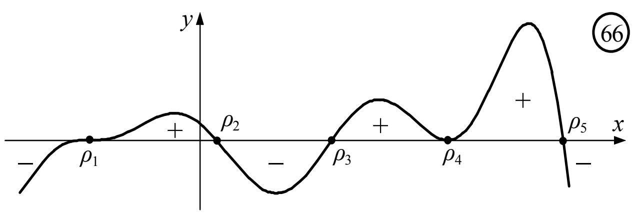


Στο διπλανό σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f στο $[\alpha,\beta]$. Επειδή τα σημεία $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$ βρίσκονται εκατέρωθεν του άξονα $x'x$, η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα σε ένα τουλάχιστον σημείο.

<u>23. Το αντίστροφο του θεωρήματος</u> δεν ισχύει δηλαδή μπορεί μια συνάρτηση να έχει ρίζα σε ένα διάστημα (α,β), τότε δεν είναι υποχρεωτικά συνεχής και ούτε τα f(α) ,f(β) είναι υποχρεωτικά ετερόσημα

— *Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε* $x\in\Delta$ *ή είναι αρνητική για κάθε* $x\in\Delta$*, δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ.*

— Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από το διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.



Αυτό μας διευκολύνει στον προσδιορισμό του προσήμου της f για τις διάφορες τιμές του x. Συγκεκριμένα, ο προσδιορισμός αυτός γίνεται ως εξής:

α) Βρίσκουμε τις ρίζες της f.

β) Σε καθένα από τα υποδιαστήματα που ορίζουν οι διαδοχικές ρίζες, επιλέγουμε έναν αριθμό και βρίσκουμε το πρόσημο της f στον αριθμό αυτό. Το πρόσημο αυτό είναι και το πρόσημο της f στο αντίστοιχο διάστημα.

24. Να διατυπώστε το Θεώρημα των ενδιαμέσων τιμών και αποδείξτε το.

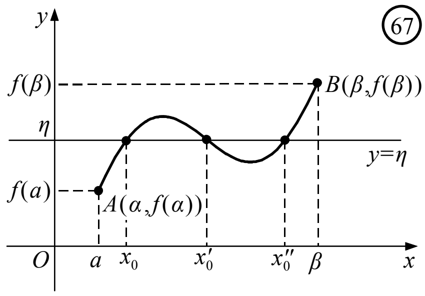
Εστω μια συνάρτηση f, ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α,β]. Αν

2001Ο – 2005
2015

- Η f είναι συνεχής στο [α,β] και
- $f(α) \neq f(β)$

τότε για κάθε αριθμό η μεταξύ των f(α) και f(β) υπάρχει ένας τουλάχιστον $χ_0$ε(α,β) τέτοιο ώστε $f(χ_0)=η$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Ας υποθέσουμε ότι $f(\alpha)<f(\beta)$. Τότε θα ισχύει $f(\alpha)<\eta<f(\beta)$. Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-\eta$, $x\in[\alpha,\beta]$, παρατηρούμε ότι:

- η g είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $g(\alpha)g(\beta)<0$,

αφού

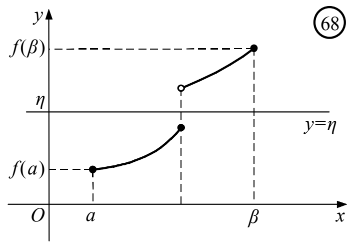
$g(\alpha)=f(\alpha)-\eta<0$ και

$g(\beta)=f(\beta)-\eta>0$.

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0)=f(x_0)-\eta=0$, οπότε $f(x_0)=\eta$.

Η γεωμετρική ερμηνεία είναι ότι η οριζόντια ευθεία που τέμνει τον y΄y στο η τέμνει σε τουλάχιστον ένα σημείο τη γραφική παράσταση της f.

Σχόλια



α) Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, τότε, όπως φαίνεται και στο διπλανό σχήμα, δεν παίρνει υποχρεωτικά όλες τις ενδιάμεσες τιμές.

β) Η εικόνα f(Δ) ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

γ) Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (Α,Β), όπου

$A=\lim_{x\to\alpha^+}f(x)$ *και* $B=\lim_{x\to\beta^-}f(x)$.

Αν, όμως, η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο (α,β), *τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα* (Β,Α).

25. Η εικόνα f(Δ) <u>ενός διαστήματος</u> Δ μέσω μιάς <u>συνεχούς και μη σταθερής</u> συνάρτησης f είναι διάστημα.

26.Να διατυπώσετε το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής

Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο [α,β], τότε η f παίρνει στο [α,β] μια μέγιστη τιμή Μ και μια ελάχιστη τιμή m.

Δηλαδή υπάρχουν χ_1, χ_2,ε[α,β] τέτοια ώστε $m=f(\chi_1)$ και $M=f(\chi_2)$ να ισχύει $m \leq f(\chi) \leq M$ για κάθε χε[α,β].

<u>Σχόλιο</u>

Τότε από το θεώρημα των ενδιαμέσων τιμών προκύπτει ότι το σύνολο τιμών μιας συνεχούς συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το [α,β] είναι το κλειστό διάστημα [m,M] όπου m η ελάχιστη τιμή και Μ η μέγιστη τιμή της.

27.Θεώρημα

Αν f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής συνάρτηση στο ανοικτό διάστημα (α,β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (Α,Β) όπου $A=\lim_{x\to\alpha^+} f(x)$ **και** $B=\lim_{x\to\beta^-} f(x)$.

Αν f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής συνάρτηση στο ανοικτό διάστημα (α,β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (Β,Α) όπου $A=\lim_{x\to\alpha^+} f(x)$ **και** $B=\lim_{x\to\beta^-} f(x)$.

Παρατηρήσεις

1. Αν το $\lim_{x\to x_o} f(x)$ είναι ένας θετικός ή αρνητικός αριθμός τότε κοντά στο x_o οι τιμές της συνάρτησης $f(x)$ θα είναι θετικοί ή αρνητικοί αριθμοί αντίστοιχα, μια σημαντική βοήθεια όταν θέλουμε να απαλείψουμε απόλυτα ή να κάνουμε Bolzano ή ……
Παρόμοια συμπεράσματα έχουμε και στις περιπτώσεις που $x\to\pm\infty$, το όριο της συνάρτησης είναι $\pm\infty$

2. Αν το $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)$ υπάρχει και είναι αριθμός και η συνάρτηση έχει τιμές , κοντά στο x_o , θετικές ή 0 τότε $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) \geq 0$

   (προσοχή μπορεί να είναι και 0 το όριο ακόμη και αν $f(x) > 0$ κοντά στο x_o).
3. ***Προσοχή!!!*** Μπορούμε να γράφουμε $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = f(x_o)$ μόνον όταν γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση είναι συνεχής στο x_o. Όταν για μια συνάρτηση, (του βιβλίου σας) , γνωρίζουμε τον τύπο της ασυνέχεια ενδεχομένως να έχουμε μόνο στα σημεία που αλλάζει ο τύπος της. Αν δεν γνωρίζουμε τον τύπο της συνάρτησης τα συμπεράσματά μας , για τη συνέχεια, θα προκύπτουν μόνο από τα δεδομένα.
4. **Όταν μας δίνεται ένα όριο μιας παράστασης, που περιέχει μια συνάρτηση $f(x)$ και μας ζητείται ένα άλλο όριο μιας διαφορετικής παράστασης που περιέχει την $f(x)$, μπορούμε να θέτουμε συνάρτηση $g(x)$ την παράσταση της οποίας γνωρίζουμε το όριό της , κοντά στο x_o , να λύνουμε , προσέχοντας τους περιορισμούς, ως προς $f(x)$ και τέλος να αντικαθιστούμε την $f(x)$ στην δεύτερη παράσταση.**

   Προσοχή!!! Η συνάρτηση $g(x)$ δεν ορίζεται στο x_o.

   Το $\lim\limits_{x\to x_o} g(x)$ ισούται με το όριο που σας δίνεται.

Απαντήστε αν είναι Σωστά ή Λάθος τα παρακάτω

1. Αν $x_0 \notin A$ στο π.ο της συνάρτησης f τότε δεν ορίζεται το $\mathbf{\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0}$.
2. Αν $x_0 \notin A$ στο π.ο της συνάρτησης f τότε η f δεν μπορεί να είναι συνεχής στο x_o.
3. Αν $x_o \varepsilon A$ στο π.ο της συνάρτησης f τότε η f είναι συνεχής στο x_o.
4.
5. Αν ισχύει $\mathbf{\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = \ell \neq 0}$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$ ή $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\ell$.
6. Αν ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0} \eta\mu x = 0$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} \sigma\upsilon\nu x = 1$.
7. Αν $\lim\limits_{x\to 1} (f(x) + g(x)) = 1$, τότε θα ισχύει και $\lim\limits_{x\to 1} f(x) + \lim\limits_{x\to 1} g(x) = 1$.
8. Ισχύει ότι: $\lim\limits_{x\to \alpha} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to \alpha} |f(x)| = 0$.
9. Αν ισχύει $\mathbf{\lim\limits_{x\to x_0} f^2(x) = \ell \neq 0}$, τότε $\mathbf{\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\sqrt{\ell}}$.
10. Αν ισχύει $\mathbf{\lim\limits_{x\to x_0} f^2(x) = 0}$, τότε $\mathbf{\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0}$.
11. Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 1} (f(x) + g(x))$ και είναι πραγματικός αριθμός, τότε υπάρχουν και τα $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$.
12. Αν $\lim\limits_{x\to 1} |f(x)| = 2004$, τότε: $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2004$ ή $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -2004$.
13. Αν $\mathbf{\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2016}$, τότε: $\mathbf{\lim\limits_{x\to 1} (f(x) - 2016) = 0}$.
14. Αν ισχύει $\lim\limits_{x\to 1} (f(x)\cdot g(x)) = 1$, τότε $f(1)\cdot g(1) = 1$.

15. Αν $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=\ell\in R$, τότε: $\lim_{x\to 1}f(x)=0$.
16. Δίνεται ο συλλογισμός: Αν $\lim_{x\to 2}\left(x^2+f(x)\right)=2008$, τότε:
$\lim_{x\to 2}x^2+\lim_{x\to 2}f(x)=2008 \Leftrightarrow \lim_{x\to 2}f(x)=2008-4 \Leftrightarrow \lim_{x\to 2}f(x)=2004$.
Η διαδικασία απόδειξης είναι σωστή.
Το $\lim_{x\to 2}f(x)$ είναι πραγματικά ίσο με 2004, αλλά αυτό προκύπτει με άλλο τρόπο.
17. Αν $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x^{1821}-5x+3}=-\infty$ τότε $\lim_{x\to 1}f(x)=+\infty$
18. Ισχύει $\lim_{x\to 0}\sqrt{2004x^{2003}-x^{2002}}=0$
19. Αν f(x)>1 και υπάρχει το $\lim_{x\to 1}f(x)$, τότε: $\lim_{x\to 1}f(x)>1$.
20. Για την συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}1+x^2, & x\neq 0\\ 2, & x=0\end{cases}$ είναι: f(x)>1 για κάθε $x\in R$, αλλά $\lim_{x\to 0}f(x)=1$.
21. Αν $g(x)\le f(x)\le h(x)$ κοντά στο x_0 και υπάρχουν τα $\lim_{x\to x_0}g(x)$ και $\lim_{x\to x_0}h(x)$, τότε υπάρχει και το $\lim_{x\to x_0}f(x)$.
22. Αν $\lim_{x\to \alpha}f(x)>0$, τότε f(x)>0 κοντά στο α.
23. Αν f(x)<0 για κάθε xεR τότε $\lim_{x\to x_0}f(x)<0$.
24. Αν f(x)≤g(x) για κάθε x κοντά στο x_o και υπάρχουν τα όρια τότε $\lim_{x\to x_0}f(x)<\lim_{x\to x_0}g(x)$.
25. Αν f(x)<g(x) για κάθε x κοντά στο x_o και υπάρχουν τα όρια τότε $\lim_{x\to x_0}f(x)<\lim_{x\to x_0}g(x)$.
26. Αν f(x)>0 για κάθε x κοντά στο x_o τότε $\lim_{x\to x_0}f(x)>0$.
27. Αν f(x)>0 για κάθε x κοντά στο x_o τότε $\lim_{x\to x_0}f(x)\ge 0$.
28. Αν f(x)≥0 για κάθε x κοντά στο x_o τότε $\lim_{x\to x_0}f(x)\ge 0$.
29. Αν $\lim_{x\to x_0}f(x)>0$, τότε f(x)>0 για κάθε x κοντά στο x_o.
30. Αν f(x)≥g(x) για κάθε x κοντά στο x_o και υπάρχουν τα όρια τότε $\lim_{x\to x_0}f(x)\ge\lim_{x\to x_0}g(x)$.
31. Αν $\lim_{x\to x_0}f(x)<\lim_{x\to x_0}g(x)$, τότε f(x)<g(x) για κάθε x κοντά στο x_o.
32. Ισχύει ότι $\lim_{x\to x_0}f(x)=k \Leftrightarrow \lim_{h\to 0}f(x_o+h)=k$.
33. Αν $\lim_{x\to x_0}f(x)=\alpha$, $\lim_{x\to x_0}g(x)=\beta$, α,βεR τκαι f(x)<g(x) για κάθε x κοντά στο x_o, τότε α≤β.
34. Αν $\lim_{x\to x_0}f(x)=\alpha$, $\lim_{x\to x_0}g(x)=\beta$, α,βεR τκαι f(x)≤g(x) για κάθε x κοντά στο x_o, τότε α≤β.

35. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$. Τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=+\infty$.

36. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ και f(x)<0 για κάθε x κοντά στο x_o. Τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=+\infty$.

37. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, τότε $f(x)\neq 0$ για κάθε x κοντά στο x_o.

38. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)<0$ τότε f(x)<0 για κάθε x κοντά στο x_o.

39. Αν $g(x)\le f(x)\le h(x)$ και $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\alpha$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=\alpha$.

40. Ισχύει $|\eta\mu\, x|<|x|$ για κάθε xεR.

41. Αν υπάρχουν τα $u_o=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, $l=\lim\limits_{u\to u_0} f(u)$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x))=\lim\limits_{u\to u_o} f(u)=l$.

42. Αν $0\le f(x)\le 2$ κοντά στο 0, τότε: $\lim\limits_{x\to 0}(x^2 f(x))=0$

43. Αν $(1+x^{2004})(1-51x^{1821})\le f(x)\le(3x+1)^{2003}$, τότε η f είναι συνεχής στο 0.

44. Αν $f(x)\le\frac{1}{x^2}$, $x\in(a,+\infty)$, τότε κατά ανάγκη θα είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

45. Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}=0$

46. Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^{1821}+1}{x^{2004}+1}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{x}=0$

47. Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu\frac{2}{x}}{\ln x}=2$

48. Αν $|f(x)-2004|<\eta\mu x$ για κάθε χεR τότε $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=2004$

49. Ισχύει ότι: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^{2000}}=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x^{2005}}=-\infty$.

50. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=-\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]=+\infty$.

51. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)g(x)]=0$.

52. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=-\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=0$.

53. Αν $\lim\limits_{x\to 5} f(x)=-\infty$, τότε: $\lim\limits_{x\to 5}\frac{1}{f(x)}=0$.

54. Αν $\lim\limits_{x\to\alpha}|f(x)|=+\infty$, τότε: $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=+\infty$ ή $-\infty$.

55. Αν $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=+\infty$ ή $-\infty$, τότε: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$.

56. Είναι: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^{2004}}{x-1}=+\infty$.

57. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -2004$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty$, τότε: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$ και $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = +\infty$.
58. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty$, τότε: $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = -\infty$.
59. Η μορφή $(-\infty)-(-\infty)$ είναι απροσδιόριστη.
60. Η μορφή $(+\infty)-(+\infty)$ είναι απροσδιόριστη.
61. Η μορφή $\frac{\infty}{0}$ είναι απροσδιόριστη.
62. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, τότε: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)} = +\infty$ ή $-\infty$.
63. Είναι: $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\nu} = +\infty$, για κάθε $\nu \in Z^*$.
64. Είναι: $\lim\limits_{x\to -\infty} x^{2\nu} = +\infty$, όπου $\nu \in N^*$.
65. Αν $f(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$, τότε: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}(\alpha_\nu x^\nu)$.
66. Αν α>1, τότε: $\lim\limits_{x\to -\infty} \alpha^x = +\infty$.
67. Αν 0<α<1, τότε: $\lim\limits_{x\to +\infty} \alpha^x = 0$.
68. Το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(1-2x^2)^3}{(x^2+1)^3}$ είναι ίσο με:-8.
69. Το $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{|x^3-x^2-1|-x^3+x^2}{x^2}$ είναι ίσο με:0.
70. Αν f,g είναι συνεχείς στο x_o τότε η gof είναι συνεχής στο x_o.
71. Αν η f, είναι συνεχής στο [α,β] και x_oε(α,β) με $f(x_o)=0$ τότε f(α)f(β)<0.
72. Αν η συνάρτηση f με f(α)f(β)<0, τότε υπάρχει x_oε(α,β) με $f(x_o)=0$.
73. Αν η συνάρτηση f συνεχής στο [α,β] με f(α)f(β)>0, τότε δενυπάρχει x_oε(α,β) με $f(x_o)=0$.
74. Αν η f συνεχής τότε μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της έχει ετερόσημες τιμές.
75. Η εικόνα f(Δ) ενός διαστήματος Δ μεταξύ μιάς συνεχούς συνάρτησης f είναι διάστημα.
76. Το σύνολο τιμών μιας συνεχούς συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το [α,β] είναι κλειστό διάστημα.
77. Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα στο (α,β) τότε το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $\left(\lim\limits_{x\to\beta} f(x), \lim\limits_{x\to\alpha} f(x)\right)$.
78. Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα στο [α,β] τότε το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα [f(β),f(α)].
79. Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ και δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.τότε δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)g(x)]$.

80. Αν f(x)>2016 για κάθε xεR και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) > 2016$.

81. Ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty} x\eta\mu\frac{1}{x} = 1$.

82. Ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$.

83. Ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0$.

84. Ισχύει $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$.

85. Κάθε συνάρτηση $|f|$, όπου f πολυωνυμική, είναι συνεχής.

86. Κάθε συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0, αν και μόνο αν και η συνάρτηση $|f|$ είναι συνεχής στο x_0.

87. Κάθε συνάρτηση f, που είναι συνεχής στο x_0, δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x=x_0$.

88. Υπάρχει συνεχής συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού ένα κλειστό διάστημα και σύνολο τιμών ένα ανοικτό διάστημα.

89. Υπάρχει πολυωνυμική συνάρτηση f: $R \to R$, με σύνολο τιμών το R^*.

90. Υπάρχει συνεχής συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού ένα διάστημα Δ, αλλά το σύνολο τιμών της δεν είναι διάστημα.

91. Η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$, με 0<α<1, δεν είναι ¨1-1¨.

92. Αν η συνάρτηση f: $(0,1) \to R$ είναι συνεχής, τότε έχει μέγιστο και ελάχιστο.

93. Αν η συνάρτηση f: $[0,1] \to R$ είναι γνησίως μονότονη και συνεχής, τότε το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $[f(0), f(1)]$.

94. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = m$, l,m$\in R$ και f(x)<g(x) κοντά στο χ_0,τότε κατά ανάγκη θα είναι: $l \le m$

95. Αν το $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{x^3 - x^2 - 2x}{x^3 - x}$ δεν υπάρχει, τότε: $\chi_0=1$.

96. Αν $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 0$ και $|g(x) - 2004| < f(x)$ για κάθε χ, τότε $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = 2004$

97. Είναι: $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\eta\mu x}{x^{1821}} = -\infty$.

98. Είναι: $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(\sqrt{x^2+1} - x) = -\infty$.

99. Είναι: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x + 2^{x+2004}}{2004 - 2^{x+1821}} = +\infty$.

100. Αν η συνάρτηση f:$[0,1] \to R$ είναι γνησίως μονότονη και συνεχής, τότε η εξίσωση f(x)=0 έχει λύση, αν και μόνο αν ισχύει $f(0)\cdot f(1) \le 0$.

101. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [0,1] και ισχύει $f(x) \le 1$ για κάθε $x \in [0,1]$, τότε το 1 είναι το μέγιστο της f στο [0,1].

102. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α, β], η εξίσωση f(x)=0 δεν έχει ρίζα στο (α, β) και υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$, ώστε: f(ξ)<0, τότε θα ισχύει: f(x)<0 για κάθε $x \in (\alpha,\beta)$.

103. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [α, β] και παίρνει δύο διαφορετικές τιμές $f(x_1)$, $f(x_2)$ με $x_1, x_2 \in [\alpha, \beta]$, τότε παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ των $f(x_1)$ και $f(x_2)$.
104. Αν μια συνεχή συνάρτηση f στο R , ισχύει: $f(x_1)=1$ και $f(x_2)=4$, τότε υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε: $f(x_0)=e$.
105. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [α, β], τότε υπάρχουν $x_1,x_2 \varepsilon[\alpha,\beta]$ με $f(x_1)\leq f(x)\leq f(x_2)$.
106. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α,β] τότε δεν μπορεί να εχει σύνολο τιμών το R.
107. Αν το 0 ανήκει στο π.ο της f τότε $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$.
108. Αν το x_o ανήκει στο π.ο της f και $\lim\limits_{x\to x_o^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_o^+} f(x)$ τότε η f συνεχής στο x_o .
109. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α,β] τότε η f συνεχής στο χ=α.
110. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α,β] με $f(\alpha)\neq f(\beta)$τότε παίρνει μόνο τις τιμές μεταξύ των f(α),f(β) .
111. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α,β] με $f(\alpha)f(\beta)>0$τότε η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο [α,β].
112. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο Α τότε η f στο Α έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.
113. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα [α, β], τότε το σύνολο τιμών της είναι: [f(α), f(β)].
114. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα [α, β], τότε το σύνολο τιμών της είναι: [f(β), f(α)].
115. Κάθε συνεχής συνάρτηση f στο [α, β] με $f(\alpha)\neq f(\beta)$, παίρνει μόνο τις τιμές μεταξύ των f(α) και f(β).
116. Αν η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, τότε το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $\left(\lim\limits_{x\to 0} f(x), \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right)$.
117. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα [α, β]. Αν η f είναι 1-1 στο [α, β], τότε είναι και γνησίως μονότονη στο [α, β].
118. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 με $f(x_0)\neq 0$, τότε κοντά στο x_0 οι τιμές της f είναι ομόσημες του $f(x_0)$.
119. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ, τότε η αντίστροφή της είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο f(Δ).
120. Αν η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα διάστημα Δ είναι συνεχής και 1-1 στο Δ, τότε η συνάρτηση f^{-1} είναι συνεχής στο f(Δ).
121. Κάθε συνεχής συνάρτηση με πεδίο ορισμού το R έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.
122. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g δεν είναι συνεχής στο x_0, τότε η συνάρτηση f+g δεν είναι συνεχής στο x_0.
123. Αν οι συναρτήσεις f, g δεν είναι συνεχείς στο σημείο x_0 του κοινού πεδίου ορισμού τους, τότε η συνάρτηση f+g δεν είναι συνεχής στο x_0.
124. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σ’ ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε και η f^2 είναι συνεχής στο x_0.
125. Αν η f έχει αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και η γραφική παράσταση της f έχει κοινό σημείο Α με την ευθεία ψ=χ, τότε το σημείο Α ανήκει και στην γραφική παράσταση της f^{-1} .

126. Αν η f είναι συνεχής στο [α,β] με f(α)<0 και υπάρχει ρε(α,β) ώστε f(ρ)=0, τότε κατ' ανάγκη f(β)>0.
127. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σ΄ αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε χεΔ ή είναι αρνητική για κάθε χεΔ, δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ.
128. Αν $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ και f(x)>0 κοντά στο α τότε $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$.

28.Τι ορίζουμε ως εφαπτομένη της στο σημείο της Α;

Έστω f μια συνάρτηση και $A(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της C_f. Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι ένας πραγματικός αριθμός λ, τότε ορίζουμε ως εφαπτομένη της C_f στο σημείο της Α, την ευθεία ε που διέρχεται από το Α και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ.

Επομένως, η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι

$$y - f(x_0) = \lambda(x - x_0),$$

Σχόλιο

α) Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης ε της C_f μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f, στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι η παράγωγος της f στο x_0. Δηλαδή, $\lambda = f'(x_o)$,

οπότε η εξίσωση της ε φ α π τ ο μ έ ν η ς ε γίνεται: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

β) Την κλίση $f'(x_0)$ της εφαπτομένης ε στο $A(x_0, f(x_0))$ θα τη λέμε και **κλίση της C_f στο Α** ή **κλίση της f στο x_0**.

γ) Η στιγμιαία ταχύτητα ενός κινητού, τη χρονική στιγμή t_0, είναι η παράγωγος της συνάρτησης θέσης $x = S(t)$ τη χρονική στιγμή t_0. Δηλαδή, είναι $\upsilon(t_o) = S'(t_o)$.

2004 – 2009

29. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της.

Εστω η συνάρτηση f ορισμένη σ'ένα διάστημα Δ και x_0 ε Δ λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 ή ότι παραγωγίζεται στο x_0 αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι πραγματικός αριθμός.

Η τιμή του ορίου λέγεται τότε παράγωγος αριθμός της f στο x_0 και συμβολίζεται f'(χ₀).

Δηλαδή $f'(\chi_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

<u>Σχόλιο</u> Ισχύει $\mathbf{f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}$, $\boldsymbol{f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}}$

Η τελευταία ισότητα οδήγησε το Leibniz να συμβολίσει την παράγωγο στο x_0 με $\frac{df(x_0)}{dx}$ ή $\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}$. Ο συμβολισμός $f'(x_0)$ είναι μεταγενέστερος και οφείλεται στον Lagrange.

Είναι φανερό ότι, αν το x_0 είναι εσωτερικό σημείο ενός διαστήματος του πεδίου ορισμού της *f*, τότε:

Η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, αν και μόνο αν υπάρχουν στο x_0 τα όρια $$\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},\quad \lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$ και είναι ίσα.

2002Ο – 2003 – 2005Ο -2007Ε – 2011Ο – 2013Ε - 2018

30. Να αποδείξετε ότι Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Για $x\neq x_0$ έχουμε $f(x)-f(x_0)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)$,

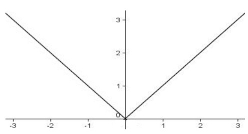
Οπότε $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=\lim\limits_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)\right]=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim\limits_{x\to x_0}(x-x_0)$

$=f'(x_0)\cdot 0=0$,αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

Επομένως, $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0.

2017

<u>Παρατηρήσεις</u>

1. Το αντίστροφο του παραπάνου θεωρήματος δέν ισχύει πάντοτε,δηλαδή αν μια συνάρτηση είναι συνεχής στο χ_0 δέν είναι καί οπωσδήποτε καί παραγωγίσιμη στο χ_0 . πχ
$$\mathbf{f(x)=|x|=\begin{cases} x, & x\geq 0\\ -x, & x<0\end{cases}}.$$

2. Αν η f είναι ασυνεχής στο χ_0 τότε δεν είναι ούτε παραγωγίσιμη στο χ_0
3. Για να είναι μιά συνάρτηση παραγωγίσιμη σ' ενα σημείο πρέπει να είναι καί συνεχής στό σημείο αυτό.

4. Καταλαβαίνουμε από το σχήμα αν μια συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη σε κάποιο σημείο αν εκεί είναι αιχμηρό σημείο.

31. Πότε μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της Af ;

Η f είναι παραγωγίσιμη στο Α ή, απλά, **παραγωγίσιμη**, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο x_0 ε Α .

32. Πότε μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) ;

Η f είναι **παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β)** του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο x_0 ε(α ,β,) .

33. Πότε μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα [α, β] ;

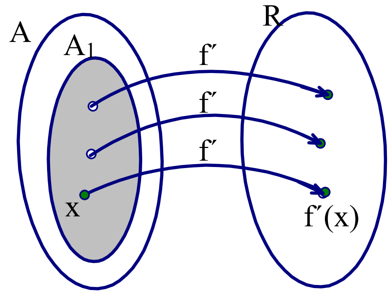
Η f είναι **παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα [α, β]** του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) και επιπλέον ισχύει

$\lim\limits_{x\to\alpha^+}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\in R$ και $\lim\limits_{x\to\beta^-}\dfrac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta}\in R$.

2010Ε - 2013

34.Τι λέγεται παράγωγος συνάρτηση

Εστω συνάρτηση ορισμένη σ'ένα διάστημα Α και A_1 το σύνολο των σημείων του Α στα οποία αυτή είναι παραγωγίσιμη. Αντιστοιχίζοντας σε κάθε xεA_1 τον παράγωγο αριθμό της f στο x ,δηλαδή τον f΄(χ), ορίζουμε την παράγωγο συνάρτηση της f (πρώτη παράγωγος) και συμβολίζεται με f'.



Η πρώτη παράγωγος της f συμβολίζεται και με $\dfrac{df}{dx}$

Ο παράγωγος αριθμός της f στο x είναι η τιμή της παραγώγου συνάρτησης στο x .

35.Παράγωγος σταθερής συνάρτησης

Η σταθερή συνάρτησης u με u(χ) = c παραγωγίζεται στο R και έχει παράγωγο u'(χ) = (c)΄=0.

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του R, τότε για $x\neq x_0$ ισχύει: $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\dfrac{c-c}{x-x_0}=0$.

Επομένως, $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0$, δηλαδή $(c)'=0$.

36. Παράγωγος ταυτοτικής συνάρτησης

Η ταυτοτική συνάρτηση ι με ι(χ) = χ παραγωγίζεται στό R και έχει παράγωγο ι'(χ) =(χ)΄=1

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του R, τότε για $x\neq x_0$ ισχύει: $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\dfrac{x-x_0}{x-x_0}=1$.

Επομένως, $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}1=1$, δηλαδή $(x)'=1$.

37 . Παράγωγος συνάρτησης f(χ) = χ^{ν} , ν ε N-{0,1}

Η συνάρτηση f με f(χ) = χ^{ν} παραγωγίζεται στο R με παράγωγο f'(χ) =$(\chi^{\nu})'$= ν $\chi^{\nu-1}$, ν ε N-{0,1}.

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του R, τότε για $x\neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x^{\nu}-x_0^{\nu}}{x-x_0}=\frac{(x-x_0)(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1})}{x-x_0}=x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1},$$

οπότε

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1})=x_0^{\nu-1}+x_0^{\nu-1}+\cdots+x_0^{\nu-1}=\nu x_0^{\nu-1},$$

δηλαδή $(x^{\nu})'=\nu x^{\nu-1}$.

2005Ε – 2006Ο – 2009Ε – 2012Ο

38. Παράγωγος συνάρτησης f(χ) = $\sqrt{x}$

Η συνάρτηση f με f(χ) =$\sqrt{x}$, παραγωγίζεται στο $(0,+\infty)$ με f'(χ) =$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $(0,+\infty)$, τότε για $x\neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}=\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}=\frac{x-x_0}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}},$$

Οπότε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$,

δηλαδή $\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Η $f(x)=\sqrt{x}$ **δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.**

2002 – 2007Ο

39. Παράγωγος συνάρτησης ημιτόνου 

Η συνάρτηση f με f(χ) = ημχ είναι παραγωγίσιμη στο R με παράγωγο f'(χ) = (ημχ)' = συνχ.

Πράγματι, για κάθε $x\in \mathrm{R}$ και $h\neq 0$ ισχύει

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\eta\mu(x+h)-\eta\mu x}{h}=\frac{\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu h+\sigma\upsilon\nu x\cdot\eta\mu h-\eta\mu x}{h}$$

$$= \eta\mu x \cdot \frac{(\sigma\upsilon\nu h - 1)}{h} + \sigma\upsilon\nu x \cdot \frac{\eta\mu h}{h}.$$

Επειδή $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\eta\mu h}{h} = 1$ και $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\sigma\upsilon\nu h - 1}{h} = 0$,

έχουμε $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \eta\mu x \cdot 0 + \sigma\upsilon\nu x \cdot 1 = \sigma\upsilon\nu x$. Δηλαδή, $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$.

2006Ε

40. Παράγωγος συνάρτησης συνημιτόνου

Η συνάρτηση f με f(χ) = συνχ είναι παραγωγίσιμη στο R με παράγωγο f'(χ) = (συνχ)' = -ημχ.

Πράγματι, για κάθε $x \in$ R και $h \neq 0$ ισχύει:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\sigma\upsilon\nu(x+h) - \sigma\upsilon\nu x}{h} = \frac{\sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\upsilon\nu h - \eta\mu x \cdot \eta\mu h - \sigma\upsilon\nu x}{h} = \sigma\upsilon\nu x \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu h - 1}{h} - \eta\mu x \cdot \frac{\eta\mu h}{h},$$

Οπότε $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0}\left(\sigma\upsilon\nu x \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu h - 1}{h}\right) - \lim\limits_{h \to 0}\left(\eta\mu x \cdot \frac{\eta\mu h}{h}\right) = \sigma\upsilon\nu x \cdot 0 - \eta\mu x \cdot 1 = -\eta\mu x$.

Δηλαδή, $(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$.

41. Παράγωγοι στοιχειωδών συναρτήσεων

Παράγωγοι στοιχειωδών συναρτήσεων		
Συνάρτηση f	Παράγωγος f΄	Διάστημα που παραγωγίζεται η f
■ f(x)=c	**(c)′=0**	R
■ f(x)=x	**(x)′=1**	R
■ $f(x)=x^{\nu}$, ν∈□	$(x^{\nu})'=\nu x^{\nu-1}$	R
■ $f(x)=x^{\kappa}$, κ∈□ -□	$(x^{\kappa})'=\kappa x^{\kappa-1}$	R*
■ $f(x)=x^{\alpha}$, α∈□ -□	$(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$	$[0,+\infty)$ με α>1 , $(0,+\infty)$ με α<1
f(x)=lnx	$(\ln x)'=\frac{1}{x}$	$(0,+\infty)$
f(x)=logx	$(\log x)'=\frac{1}{x \cdot \ln 10}$	$(0,+\infty)$
■ f(x)= ln|x|	$(\ln\|x\|)'=\frac{1}{x}$	R*
■ $f(x)=\sqrt{x}$	$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(0,+\infty)$
$f(x)=e^{x}$	$(e^{x})'=e^{x}$	R
■ $f(x)=\alpha^{x}$, α>0	$(\alpha^{x})'=\alpha^{x} \cdot \ln\alpha$	R
■ f(x)=ημx	**(ημx)′=συνx**	R

■ f(x)=συνx	(συνx)′=-ημx	R
■ f(x)=εφx	$(εφx)'=\frac{1}{συν^2x}=1+εφ^2x$	$A=\{x\in R/x\neq κπ+\frac{π}{2}\ ,\ κ\in \mathbb{Z}\}$
f(x)=σφx	$(σφx)'=-\frac{1}{ημ^2x}=-(1+σφ^2x)$	$A=\{x\in R/x\neq κπ\ ,\ κ\in \mathbb{Z}\}$
f(x)=|x|	$(\lvert x\rvert)'=\begin{cases}-1\ ,\ x<0\\ 1\ ,\ x>0\end{cases}$	R*
$f(x)=\frac{1}{x}$	$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$	R*

2009Ο

42. Παράγωγος αθροίσματος

Αν οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$

Για $x\neq x_0$, ισχύει:

$$\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}.$$

Επειδή οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)+g'(x_0),$$

Δηλαδή $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$.

<u>Το αντίστροφο του θεωρήματος</u> δεν ισχύει δηλαδή μπορεί η συνάρτηση f+g να είναι παραγωγίσιμη στο x_o χωρίς υποχρεωτικά οι συναρτήσεις f,g να είναι παραγωγίσιμη στο x_o.

<table>
<tr><td colspan="2">Κανόνες παραγώγισης (Για λόγους απλούστευσης συμβολίζουμε f(x)→f , f΄(x)→f΄ , g(x) →g , g΄(x) →g΄ κ.τ.λ. και οι συναρτήσεις παραγωγίζονται σε ένα διάστημα Δ)</td></tr>
<tr><td>Παράγωγος αθροίσματος</td><td>■ $(f+g)'=f'+g'$
και γενικά $(f_1+f_2+f_3+...+f_ν)'=f_1'+f_2'+f_3'+...+f_ν'$</td></tr>
<tr><td>Παράγωγος διαφοράς</td><td>$(f-g)'=f'-g'$</td></tr>
<tr><td>Παράγωγος γινομένου αριθμού επί</td><td>$(λf)'=λf'$, λεR
και γενικά $(λ_1f_1+λ_2f_2+λ_3f_3+...+λ_νf_ν)'=λ_1f_1'+λ_2f_2'+λ_3f_3'+...+λ_νf_ν'$
με $λ_i$ εR , i=1,2,..,ν</td></tr>
</table>

συνάρτηση	
Παράγωγος γινομένου	$(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g'$ **και γενικά** $(f_1\cdot f_2\cdot f_3\cdot \ldots \cdot f_\nu)' = f_1'\cdot f_2\cdot\ldots\cdot f_\nu + f_1\cdot f_2'\cdot\ldots\cdot f_\nu + \ldots + f_1\cdot f_2\cdot\ldots\cdot f_\nu'$
Παράγωγος δύναμης	$(f^\nu)' = \nu\cdot f^{\nu-1}\cdot f'$, $\nu\in\mathbb{N}$
	$(f^\mu)' = \mu\cdot f^{\mu-1}\cdot f'$, $\mu\in\mathbb{Z}$
	$(f^\alpha)' = \alpha\cdot f^{\alpha-1}\cdot f'$, $\alpha\in\mathbb{R}$ **(όταν η f^α έχει έννοια)**
Παράγωγος πηλίκου	$\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'\cdot g - f\cdot g'}{g^2}$, $g(x)\neq 0$
	$\left(\dfrac{1}{g}\right)' = -\dfrac{g'}{g^2}$, $g(x)\neq 0$

<u>Σχόλιο:</u> Οι πράξεις μεταξύ παραγωγισίμων συναρτήσεων μας δίνουν παραγωγίσιμη συνάρτηση.

Το αντίστροφο δεν ισχύει. Δηλαδή μπορεί το άθροισμα ή το γινόμενο ή το πηλίκο δύο συναρτήσεων να είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση , αλλά καμιά από αυτές να μην είναι παραγωγίσιμη

<u>π.χ.</u> Οι συναρτήσεις $f(x)=1+|x|$ και $g(x)=1-|x|$ <u>δεν είναι</u> παραγωγίσιμες στο 0, αλλά οι συναρτήσεις

$(f+g)(x)=2$ και $(f\cdot g)(x)=1-x^2$ είναι παραγωγίσιμες στο 0

Το θεώρημα $(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g'$ επεκτείνεται και για περισσότερες από δύο συναρτήσεις. Έτσι, για τρεις παραγωγίσιμες συναρτήσεις ισχύει:

$$(f(x)g(x)h(x))' = [(f(x)g(x))\cdot h(x)]' = (f(x)g(x))'\cdot h(x) + (f(x)g(x))\cdot h'(x)$$

$$= [f'(x)g(x) + f(x)g'(x)]h(x) + f(x)g(x)h'(x)$$

$$= f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x).$$

43 .Παράγωγος του χ σε αρνητικό εκθέτη ν>0 $(x^{-\nu})' = -\nu x^{-\nu-1}$

Πράγματι, για κάθε $x\in R^*$ έχουμε:

$$(x^{-\nu})' = \left(\frac{1}{x^\nu}\right)' = \frac{(1)'x^\nu - 1(x^\nu)'}{(x^\nu)^2} = \frac{-\nu x^{\nu-1}}{x^{2\nu}} = -\nu x^{-\nu-1}.$$

2010Ο – 2016Ο

---

44. Παράγωγος συνάρτησης f(χ) = εφχ

Η συνάρτηση f με f(χ) = εφχ είναι παραγωγίσιμη στο R-{x/ συνx=0} με παράγωγο f'(χ) = (εφχ)' $= \frac{1}{συν^2 x}$

Πράγματι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε: $(εφx)' = \left(\frac{ημx}{συνx}\right)' = \frac{(ημx)'συνx - ημx(συνx)'}{συν^2 x} = \frac{συνxσυνx + ημxημx}{συν^2 x}$

$$= \frac{συν^2 x + ημ^2 x}{συν^2 x} = \frac{1}{συν^2 x}.$$

<u>Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης</u>: Αν η συνάρτηση <u>g είναι παραγωγίσιμη στο x_0</u> και η <u>f είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$,</u> τότε και η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$

<table>
<tr><td colspan="2">Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο Δ και η f είναι παραγωγίσιμη στο g(Δ),
τότε και η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει:</td></tr>
<tr><td rowspan="5">Παράγωγος σύνθεσης συναρτήσεων</td><td>• $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$</td></tr>
<tr><td>• $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ (άλλη γραφή)</td></tr>
<tr><td>• Αν u=g(x) τότε $(f(u))' = f'(u) \cdot u'$</td></tr>
<tr><td>• Αν y=f(u) και u=g(x) τότε $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ (κανόνας της αλυσίδας)</td></tr>
<tr><td>• Γενικά αν $y=f(u_1(u_2(u_3 \; ..... \; u(x)) \; .... \;)))$ τότε $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du_1} \cdot \frac{du_1}{du_2} \cdot \frac{du_2}{du_3} \cdot \; .... \; \cdot \frac{du}{dx}$</td></tr>
</table>

Παράγωγοι βασικών συνθέτων συναντήσεων	
$(f^ν)' = νf^{ν-1} \cdot f'$, νεN	$(f^α)' = αf^{α-1} \cdot f'$, αεR
$(\sqrt{f})' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$	$\sqrt[ν]{f^μ} = \left(f^{\frac{μ}{ν}}\right)' = \frac{μ}{ν} f^{\frac{μ}{ν}-1} \cdot f'$
$(ημf)' = συνf \cdot f'$	$(ημ^ν f)' = ν \cdot ημ^{ν-1} f \cdot (ημf)'$
$(συνf)' = -ημf \cdot f'$	$(συν^ν f)' = ν \cdot συν^{ν-1} f \cdot (ημf)'$
$(εφf)' = \frac{1}{συν^2 f} \cdot f' = (1+εφ^2 f) \cdot f'$	$(εφ^ν f)' = ν \cdot εφ^{ν-1} f \cdot (εφf)'$
$(σφf)' = -\frac{1}{ημ^2 f} \cdot f' = -(1+σφ^2 f) \cdot f'$	$(σφ^ν f)' = ν \cdot σφ^{ν-1} f \cdot (σφf)'$
$(e^f)' = e^f \cdot f'$	$(α^f)' = α^f \cdot \ln α \cdot f'$

$(\ln f)'=\frac{1}{f}\cdot f'$, $(\ln\lvert f\rvert)'=\frac{1}{f}\cdot f'$	$(\ln^{\nu} f)'=\nu\cdot\ln^{\nu-1} f\cdot(\ln f)'$
$(\log f)'=\frac{1}{f\cdot\ln 10}\cdot f'$	$(\log^{\nu} f)'=\nu\log^{\nu-1} f\cdot(\log f)'$
Προσοχή ! $(h^{f})' = \left(e^{\ln h\cdot f}\right)' = e^{\ln h\cdot f}(\ln h\cdot f)' = h^{f}(\ln h\cdot f)' = ...$	

Σχόλια

Γενικά, αν μια συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(\Delta)$, τότε η συνάρτηση $f\circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει $(f(g(x)))'=f'(g(x))\cdot g'(x)$.

Δηλαδή, αν $u=g(x)$, τότε $(f(u))'=f'(u)\cdot u'$. Με το συμβολισμό του Leibniz, αν $y=f(u)$ και $u=g(x)$, έχουμε τον τύπο $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$ που είναι γνωστός ως **κανόνας της αλυσίδας.** Το σύμβολο $\frac{dy}{dx}$ δεν είναι πηλίκο. Στον κανόνα της αλυσίδας απλά συμπεριφέρεται ως πηλίκο, πράγμα που ευκολύνει την απομνημόνευση του κανόνα.

45. Παράγωγος συνάρτησης $f(x) = x^{\alpha}$, α ε R

Η συνάρτηση f με $f(x) = x^{\alpha}$, α ε R παραγωγίζεται στο π.ο της με $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$, εκτός από το 0 όταν 0 < α < 1.

Πράγματι, αν $y=x^{\alpha}=e^{\alpha\ln x}$ και θέσουμε $u=\alpha\ln x$, τότε έχουμε $y=e^{u}$. Επομένως,
$y'=(e^{u})'=e^{u}\cdot u'=e^{\alpha\ln x}\cdot\alpha\cdot\frac{1}{x}=x^{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{x}=\alpha x^{\alpha-1}$.

46. Παράγωγος συνάρτησης $f(x) = \alpha^{x}$, α>0

Η συνάρτηση f με $f(x) = \alpha^{x}$, είναι παραγωγίσιμη στο R με παράγωγο $f'(x) = (\alpha^{x})' = \alpha^{x}\ln\alpha$

Πράγματι, αν $y=\alpha^{x}=e^{x\ln\alpha}$ και θέσουμε $u=x\ln\alpha$, τότε έχουμε $y=e^{u}$. Επομένως,
$y'=(e^{u})'=e^{u}\cdot u'=e^{x\ln\alpha}\cdot\ln\alpha=\alpha^{x}\ln\alpha$.

2008

47. Παράγωγος συνάρτησης $f(x) = \ln\lvert x\rvert$

Η συνάρτηση f με $f(x) = \ln\lvert x\rvert$ είναι παραγωγίσιμη στο R^{*} με παράγωγο

$f'(x) = (\ln\lvert x\rvert)' = \frac{1}{x}$

Πράγματι·

— αν $x>0$, τότε $(\ln\lvert x\rvert)'=(\ln x)'=\frac{1}{x}$, ενώ

— αν $x<0$, τότε $\ln|x|=\ln(-x)$, οπότε, αν θέσουμε $y=\ln(-x)$ και $u=-x$, έχουμε $y=\ln u$. Επομένως, $y'=(\ln u)'=\frac{1}{u}\cdot u'=\frac{1}{-x}(-1)=\frac{1}{x}$

και άρα $(\ln|x|)'=\frac{1}{x}$.

48. Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση y=f(x), τι ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x στο σημείο

Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση $y=f(x)$, όταν f είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο x_0, τότε ονομάζουμε **ρυθμό μεταβολής του y ως προς το xστο σημείο** x_0 την παράγωγο $f'(x_0)$.

<u>Σχόλιο</u>

Κάθε πολυώνυμο περιττού βαθμού με όρια στα άκρα έχει τουλάχιστον μία ρίζα.

Σχόλια

α) Ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας υ ως προς το χρόνο t τη χρονική στιγμή t_o είναι η παράγωγος $υ'(t_o)$, της ταχύτητας υ ως προς το χρόνο t τη χρονική στιγμή t_o. Η παράγωγος $υ'(t_o)$ λέγεται επιτάχυνση του κινητού τη χρονική στιγμή t_o και συμβολίζεται με $α(t_o)$, δηλαδή: $α(t_o)=υ'(t_o)=S''(t_o)$.

β) Στην οικονομία το κόστος παραγωγής Κ, η είσπραξη Ε και το κέρδος Ρ εκφράζονται συναρτήσει της ποσότητας x του παραγόμενου προϊόντος. Έτσι, η παράγωγος $K'(x_o)$ παριστάνει το ρυθμό μεταβολής του κόστους Κ ως προς την ποσότητα x, όταν $x=x_o$ και λέγεται οριακό κόστος στο x_o. Ανάλογα, ορίζονται και οι έννοιες οριακή είσπραξη στο x_o και οριακό κέρδος στο x_o.

49.Να διατυπώσετε το θεώρημα του Rolle και να το εξηγήσετε γεωμετρικά

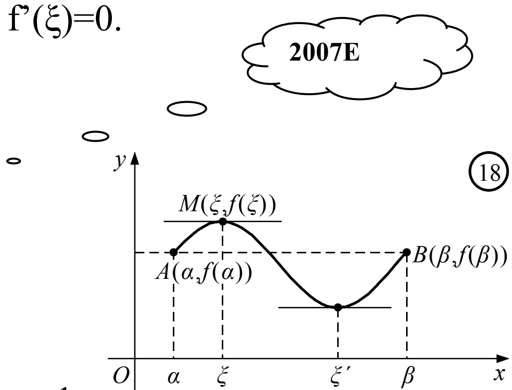
Αν μία συνάρτηση f είναι

Συνεχής στο $[\alpha,\beta]$

Παραγωγίσιμη στο (α, β)

f(α)=f(β)

τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον ξε(α, β) τέτοιο ώστε: f’(ξ)=0.



1.

<u>Παρατηρήσεις</u>

- **Γεωμετρικά αυτό σημαίνει** ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον ξε(α, β) τέτοιο ώστε η εφαπτόμενη της C_f στο M(ξ,f(ξ)) να είναι παράλληλη στον x΄x.
- Το θεώρημα Rolle εξασφαλίζει την ύπαρξη ρίζας της πρώτης παραγώγου σ’ ένα διάστημα (α, β) χωρίς όμως και να μας

λέει ποια είναι η ρίζα.

- Αν δεν ισχύει η μία τουλάχιστον από τις τρεις προϋποθέσεις του θεώρημα Rolle στο $[\alpha, \beta]$ τότε δεν εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle.
- Αν μια συνάρτηση f δεν ικανοποιεί όλες τις προϋποθέσεις του θεώρημα Rolle στο $[\alpha, \beta]$ τότε αυτό δεν σημαίνει ότι δεν υπάρχει οπωσδήποτε και ρίζα της f' στο (α, β).

50. Να διατυπώσετε το θεώρημα Μέσης Τιμής και να το εξηγήσετε γεωμετρικά

2003 – 2008Ε - 2013
2016 – 2016Ε

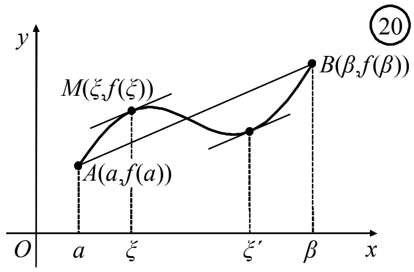
Αν μία συνάρτηση f είναι

- Συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$
- Παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β)

Τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον ξε(α, β) τέτοιο ώστε: $f'(\xi)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$

<u>**Παρατήρηση**</u>

Γεωμετρικά αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον ξε(α, β) τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο M(ξ,f(ξ)) να είναι παράλληλη στην ευθεία ΑΒ όπου Α(α,f(α)) και Β(β,f(β)).



51. Ποιες οι συνέπειες του θεωρήματος της Μέσης Τιμής

2003Ο – 2004Ε –
2009 – 2014
2015Ο

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν

- **Η f είναι συνεχής στο Δ και**
- **f'(x)=0 για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ**

τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1)=f(x_2)$. Πράγματι

- Αν $x_1 = x_2$, τότε προφανώς $f(x_1)=f(x_2)$.
- Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}. \qquad (1)$$

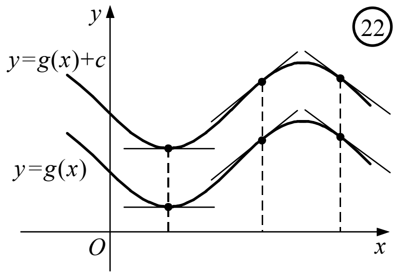
Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ, ισχύει $f'(\xi)=0$,οπότε, λόγω της (1), είναι $f(x_1)=f(x_2)$. Αν $x_2 < x_1$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1)=f(x_2)$.
Σε όλες, λοιπόν, τις περιπτώσεις είναι $f(x_1)=f(x_2)$.

52. Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Αν

- **οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και**
- **f΄(x)=g΄(x) για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε για κάθε xεΔ να ισχύει f(x)=g(x)+c.**

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

- Η συνάρτηση $f-g$ είναι συνεχής στο Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$ ισχύει
- $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$.
- Επομένως, σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, η συνάρτηση $f-g$ είναι σταθερή στο Δ. Άρα, υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει $f(x) - g(x) = c$, οπότε $f(x) = g(x) + c$.



53. Ισχύει η ισοδυναμία f ΄(x)=f(x) ⇔ f(x)=ce^x

i) Για κάθε $x \in$ R έχουμε: $\phi'(x) = \left(\dfrac{f(x)}{e^x}\right)' = \dfrac{f'(x)e^x - f(x)e^x}{(e^x)^2} = \dfrac{f'(x) - f(x)}{e^x} \overset{(1)}{=} 0$,

Επομένως, η φ είναι σταθερή στο R.

ii) Επειδή η φ είναι σταθερή, υπάρχει $c \in$ R τέτοιο, ώστε $\varphi(x) = c$ για κάθε $x \in$ R ή, ισοδύναμα, $\dfrac{f(x)}{e^x} = c$ για κάθε $x \in$ R. Επομένως $f(x) = ce^x$ για κάθε $x \in$ R.

Επειδή $f(0) = 1$, έχουμε $1 = c$, οπότε $f(x) = e^x$ για κάθε $x \in$ R.

<u>Σχόλια</u>

Τα παραπάνω θεωρήματα ισχύουν σε διαστήματα και όχι σε ένωση διαστημάτων.

Αν f ΄(x)=0 για xεR* τότε είναι λάθος να πούμε ότι f(x)=c για xεR*.

54 . Παράγωγος και μονοτονία.

2006 – 2012
2014Ο - 2017

Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ.

. Αν f΄(χ)>0 σε κάθε εσωτερικό σημείο χ του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ

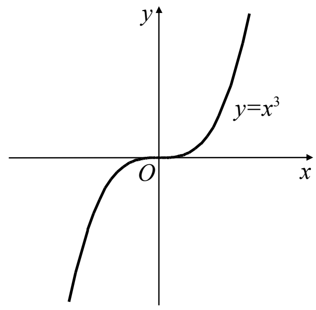
. Αν f΄(χ)<0 σε κάθε εσωτερικό σημείο χ του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ

- Αποδεικνύουμε το θεώρημα στην περίπτωση που είναι $f'(x) > 0$.

Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$. Πράγματι, στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, οπότε έχουμε $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$

Επειδή $f'(\xi) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$, έχουμε $f(x_2) - f(x_1) > 0$, οπότε $f(x_1) < f(x_2)$.

- Στην περίπτωση που είναι $f'(x) < 0$ εργαζόμαστε αναλόγως.



<u>**Σχόλιο**</u>

Το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος δεν ισχύει.

Δηλαδή αν η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο Δ, η παραγωγός της δεν είναι υποχρεωτικά θετική στο εσωτερικό του Δ , μπορεί να είναι και μηδέν.

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = x^3$, αν και είναι γνησίως αύξουσα στο R, εντούτοις έχει παράγωγο $f(x) = 3x^2$ η οποία δεν είναι θετική σε όλο το R, αφού $f'(0) = 0$. Ισχύει όμως $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in$ R. <u>Δηλαδή αν f γνησίως αύξουσα τότε ίσως</u> f(x)≥0.

Πίνακας Αρχικών Συναρτήσεων

Συνάρτηση f	Μια αρχική της f
f(x)=0	F(x)=c, c σταθερά
f(x)=c	F(x)=cx
$f(x)=x^{v}$ v ε N*, x ε R	$F(x)=\frac{x^{v+1}}{v+1}$
$f(x)=x^{\alpha}$ α ε R-$\{-1\}$ x>0	$F(x)=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$f(x)=\frac{1}{x}$, x>0 ή x<0	$F(x)=\ln\lvert x\rvert$
f(x)=ημx	F(x)=-συνx
f(x)=συνx	F(x)=ημx
$f(x)=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$	F(x)=εφx
$f(x)=-\frac{1}{\eta\mu^2 x}$	F(x)=σφx
$f(x)=e^x$	$F(x)=e^x$
$f(x)=\kappa^x$ $0<k\neq 1$	$F(x)=\frac{1}{\ln k}\ k^x$
f(x)=ημg(x) g΄(x)	F(x)=-συνg(x)
f(x)=συνg(x) g΄ (x)	F(x)=ημg(x)
$f(x)=\frac{g'(x)}{\sigma\upsilon\nu^2 g(x)}$	F(x)=εφg(x)
$f(x)=\frac{g'(x)}{\eta\mu^2 g(x)}$	F(x)=σφg(x)
$f(x)=e^{g(x)}g'(x)$	$F(x)=e^{g(x)}$
$f(x)=k^{g(x)}g'(x)$ $0<k\neq 1$	$F(x)=\frac{1}{\ln k}\ k^{g(x)}$
$f(x)=\frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$	$F(x)=\sqrt{g(x)}$
$f(x)=\frac{g'(x)}{g(x)}$	$F(x)=\ln\lvert g(x)\rvert$
$f(x)=g'(x)g^{v}(x)$	$F(x)=\frac{g^{v+1}(x)}{v+1}$
f(x)=g΄ (x)+n΄ (x)	F(x)=g(x)+n(x)
f(x)=g΄ (x)n(x)+g(x)n΄ (x)	F(x)=g(x)n(x)
$f(x)=\frac{g'(x)n(x)-g(x)n'(x)}{n^2(x)}$	$F(x)=\frac{g(x)}{n(x)}$

$$e^{\alpha x} \to \frac{e^{\alpha x}}{\alpha}$$

$$\eta\mu\alpha x \to \frac{-\sigma\upsilon\nu\alpha x}{\alpha}$$

$$\sigma\upsilon\nu\alpha x \to \frac{\eta\mu\alpha x}{\alpha}$$

$$\frac{k}{\alpha x+\beta} \to \frac{k}{\alpha}\ln\lvert\alpha x+\beta\rvert$$

Μορφη
f'+gf
πολ/ζω με e^h
οπου $h'=g$

2012

55. Πότε μια συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_o εΑ

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο χ_oεΑ <u>τοπικό μέγιστο</u>, όταν υπάρχει δ>0 τέτοιο ώστε $f(\chi)\leq f(\chi_0)$ για κάθε

2015

χεΑ$\cap$(χ$_0$-δ, χ$_0$+δ).
Το χ$_0$ λέγεται θέση ή σημείο τοπικού μεγίστου, ενώ το f(χ$_0$) τοπικό μέγιστο της f.

56.Πότε μια συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο x$_o$ ε A

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο χ$_o$εΑ τοπικό ελάχιστο, όταν υπάρχει δ>0 τέτοιο ώστε f(χ)$\geq$ f(χ$_0$) για κάθε χεΑ$\cap$(χ$_0$-δ, χ$_0$+δ).
Το χ$_0$ λέγεται θέση ή σημείο τοπικού ελαχίστου,ενώ το f(χ$_0$) τοπικό ελάχιστο της f.

Σχόλιο

*α) Τα τοπικά μέγιστα και τοπικά ελάχιστα της f λέγονται **τοπικά ακρότατα** αυτής, ενώ τα σημεία στα οποία η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα λέγονται θέσεις τοπικών ακροτάτων. Το μέγιστο και το ελάχιστο της f λέγονται **ολικά ακρότατα** ή απλά ακρότατα αυτής.*

β) Ένα τοπικό μέγιστο μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο.

*γ) Αν μια συνάρτηση **f παρουσιάζει μέγιστο, τότε αυτό θα είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα**, ενώ αν παρουσιάζει, ελάχιστο, τότε αυτό θα είναι το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα.*

*δ) **Το μεγαλύτερο όμως από τα τοπικά μέγιστα μίας συνάρτησης δεν είναι πάντοτε μέγιστο αυτής**. Επίσης το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα μίας συνάρτησης δεν είναι πάντοτε ελάχιστο της συνάρτησης.*

2004 – 2011 – 2016Ε – 2017Ε -2017Ο

57. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat και να το αποδείξετε:

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ'ένα διάστημα Δ και χ$_0$ ένα εσωτερικό σημείο του Δ.
Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο χ$_0$ και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε:
f΄(χ$_0$)=0
ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο. Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο, ώστε

$(x_0-\delta, x_0+\delta)\subseteq \Delta$ και $f(x)\leq f(x_0)$, για κάθε $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$. (1)

Επειδή, επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, ισχύει

$f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Επομένως,

— αν $x\in(x_0-\delta, x_0)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0 \qquad (2)$$

— αν $x\in(x_0, x_0+\delta)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leq 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leq 0\,. \qquad (3)$$

Έτσι, από τις (2) και (3) έχουμε $f'(x_0)=0$.
Η απόδειξη για τοπικό ελάχιστο είναι ανάλογη.

Γεωμετρική ερμηνεία
Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_o \in (\alpha,\beta)$ και είναι παραγωγίσιμη στο x_o, τότε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(x_o, f(x_o))$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

Το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος δεν ισχύει π.χ $f(x)=x^3$.
Μπορεί $f'(x_0)=0$ χωρίς στο xo να παρουσιάζει τοπικό ακρότατο.

<u>Παρατηρήσεις</u>

- ✓ Ένα τοπικό μέγιστο μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο.
- ✓ Το μέγιστο είναι τοπικό ακρότατο, το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα.
- ✓ Το μέγιστο είναι μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα.
- ✓ Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα δεν είναι πάντα μέγιστο.
- ✓ Αν x_o εσωτερικό του Δ και παρουσιάζει τοπικό ακρότατο τότε $f'(x_o)=0$.
  Είναι Λάθος γιατί δεν γνωρίζουμε ότι είναι παραγωγίσιμη.
- ✓ Αν x_o ε Δ και παρουσιάζει τοπικό ακρότατο και παραγωγίσιμη τότε $f'(x_o)=0$.
  Είναι Λάθος γιατί μπορεί να είναι άκρο κλειστού διαστήματος.

<u>Σχόλιο</u>
Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f΄είναι διαφορετική από το μηδέν, δεν είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ
είναι:
πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων
1. Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η παράγωγος της f μηδενίζεται.
2. Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται.
3. Τα άκρα του Δ (αν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της)

2013Ε

58. Τι ονομάζεται κρίσιμο σημείο μιάς συνάρτησης

Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το μηδέν, λέγονται **<u>κρίσιμα σημεία</u>** της f στο διάστημα Δ.
<u>Σχόλιο</u>
Όλα τα κρίσιμα σημεία δεν είναι θέσεις πάντα τοπικών ακροτάτων.

<u>Παρατήρηση</u>
Πώς βρίσκουμε τα ολικά ακρότατα σε μια συνεχή συνάρτηση f σε ένα κλειστό διάστημα;
Απάντηση
Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, όπως γνωρίζουμε από το Θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής, η f παρουσιάζει μέγιστο και ελάχιστο. Για την

εύρεση του μέγιστου και ελάχιστου της συνάρτησης f σε ένα κλειστό διάστημα εργαζόμαστε ως εξής:

1. Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία της f.
2. Υπολογίζουμε τις τιμές της f στα σημεία αυτά και στα άκρα των διαστημάτων.
3. Από αυτές τις τιμές η μεγαλύτερη είναι το μέγιστο και η μικρότερη το ελάχιστο της f.

59.ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι **συνεχής**.

2012Ε - 2016

i) Αν $f'(x)>0$ στο (α,x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0,β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

ii) Αν $f'(x)<0$ στο (α,x_0) και $f'(x)>0$ στο (x_0,β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f.

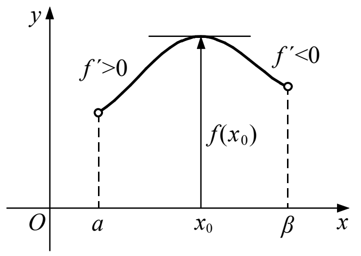
2014Ε

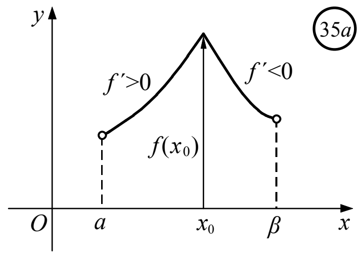
iii) Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α,β).

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

i) Επειδή $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha,x_0]$. Έτσι έχουμε $f(x)\le f(x_0)$, για κάθε $x\in(\alpha,x_0]$. (1)

Επειδή $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(x_0,\beta)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0,\beta)$. Έτσι έχουμε: $f(x)\le f(x_0)$, για κάθε $x\in[x_0,\beta)$ (2)





Επομένως, λόγω των (1) και (2), ισχύει: $f(x)\le f(x_0)$, για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$,

που σημαίνει ότι το $f(x_0)$ είναι μέγιστο της f στο (α,β) και άρα τοπικό μέγιστο αυτής.

ii) Εργαζόμαστε αναλόγως.

iii) Έστω ότι $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0 θα είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(\alpha, x_0]$ και $[x_0, \beta)$. Επομένως, για $x_1 < x_0 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$. Άρα το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της f. Θα δείξουμε, τώρα, ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β). Πράγματι, έστω $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ με $x_1 < x_2$.

— Αν $x_1, x_2 \in (\alpha, x_0]$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha, x_0]$, θα ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

— Αν $x_1, x_2 \in [x_0, \beta)$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0, \beta)$, θα ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

— Τέλος, αν $x_1 < x_0 < x_2$, τότε όπως είδαμε $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$.

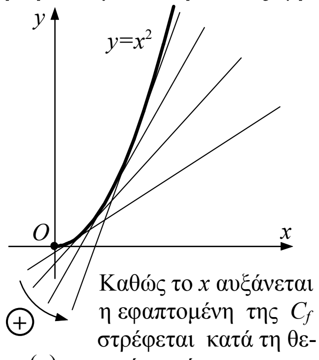
Επομένως, σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β).

Ομοίως, αν $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$.

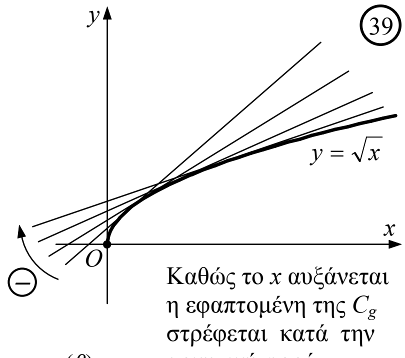
Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ'ένα κλειστό διάστημα [α,β], όπως γνωρίζουμε η f παρουσιάζει μέγιστο και ελάχιστο.
Για την εύρεση του μεγίστου και ελαχίστου εργαζόμαστε ως εξής:
1. Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία της f.
2. Υπολογίζουμε τις τιμές της f στα σημεία αυτά και στα άκρα των διαστημάτων.
3. Από αυτές τις τιμές η μεγαλύτερη είναι το μέγιστο και η μικρότερη το ελάχιστο της f.

60. Ποια η γεωμετρική ερμηνεία της κυρτότητας.

Ας θεωρήσουμε τώρα τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων στο διάστημα $[0,+\infty)$.



(α)



(β)

Παρατηρούμε ότι καθώς το x αυξάνεται:

— η κλίση $f'(x)$ της C_f αυξάνεται, δηλαδή η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$, ενώ

— η κλίση της $g'(x)$ της C_g ελαττώνεται, δηλαδή η g' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$.

Στην πρώτη περίπτωση λέμε ότι η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω στο $[0,+\infty)$, ενώ στη δεύτερη περίπτωση λέμε ότι η g στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο $[0,+\infty)$.

61. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικότου Δ, πότε θα λέμε ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω και πότε προς τα κάτω;

Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Θα λέμε ότι:

2006 – 2011Ο

• Η συνάρτηση f στρέφει τα **<u>κοίλα προς τα άνω</u>** ή είναι **κυρτή** στο Δ, αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ.

2010 – 2014

• Η συνάρτηση f στρέφει τα **<u>κοίλα προς τα κάτω</u>** ή είναι **κοίλη** στο Δ, αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ.

ΣΧΟΛΙΟ

Αποδεικνύεται ότι, αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή (αντιστοίχως κοίλη) σ' ένα διάστημα Δ, <u>τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται "κάτω" (αντιστοίχως "πάνω") από τη γραφική της παράσταση , με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.</u>

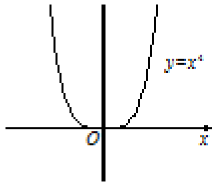
Σχόλιο

Για να δηλώσουμε στον πίνακα μεταβολών ότι μια συνάρτηση f είναι κυρτή χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $\smile$ (αντιστοίχως κοίλη χρησιμοποιούμε $\frown$).

62. ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ'ένα διάστημα Δ και δυο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ.
. Αν f΄΄(χ)>0 για κάθε εσωτερικό σημείο χ του Δ, τότε η f είναι κυρτή στο Δ.
. Αν f΄΄(χ)<0 για κάθε εσωτερικό σημείο χ του Δ, τότε η f είναι κοίλη στο Δ.

Το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος δεν ισχύει π.χ $f(x)=x^4$.



Δηλαδή η f μπορεί να είναι κυρτή όμως μπορεί να είναι f΄΄(x)≥0. Επειδή η $f'(x)=4x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο R η $f(x)=x^4$ είναι κυρτή στοR. Εντούτοις, η $f''(x)$ δεν είναι θετική στοR, αφού $f''(0)=0$.

63.Πότε το σημείο ονομάζεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0. Αν

- η f είναι κυρτή στο (α,x_0) και κοίλη στο (x_0,β), ή αντιστρόφως, και
- η C_f έχει εφαπτομένη στο σημείο $A(x_0,f(x_0))$,

τότε το σημείο $A(x_0,f(x_0))$ ονομάζεται **σημείο καμπής** της γραφικής παράστασης της f.

Σχόλιο

Όταν το $A(x_0,f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της C_f, τότε λέμε ότι η **f παρουσιάζει στο x_0 καμπή** και το x_0 λέγεται **θέση σημείου καμπής**. Στα σημεία καμπής η εφαπτομένη της C_f "διαπερνά" την καμπύλη.

64. ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν το Α $(\chi_0,f(\chi_0))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f και η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, τότε $f''(\chi_0)=0$.

2017Ο – 2017Ε

Το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος δεν ισχύει π.χ $f(x)=x^4$.

Δηλαδή μπορεί $f''(x_0)=0$, χωρίς στο x_o να παρουσιάζει σημείο καμπή.

Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις σημείων καμπής μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ;

Απάντηση

i)Τ**α εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f'' μηδενίζεται.**
ii)Τ**α εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία δεν υπάρχει η f''** .

Πώς καταλήγουμε στο ποιες από τις πιθανές θέσεις σημείων καμπής μιας συνάρτησης f αποτελούν τελικά σημεία καμπής της;

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα (α,β) και $x_0 \in (\alpha,\beta)$. Αν

- η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 και
- ορίζεται εφαπτομένη της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$,

τότε το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της C_f.

2009Ο – 2010
2015Ε

65.Πότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f

Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$, τότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f.

66 . Πότε η ευθεία $y = \ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντίστοιχα στο $-\infty$)

Αν $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ (αντιστοίχως $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$), τότε η ευθεία $y = \ell$ λέγεται **οριζόντια ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$).

67 . Πότε η ευθεία y=λx+β λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντίστοιχα στο $-\infty$)

Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται **ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$, αν

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0,$$

2005 – 2011

αντιστοίχως

$$\lim_{x\to-\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0.$$

68.ΘΕΩΡΗΜΑ

Η ευθεία y=λχ+β είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$

αν και μόνο αν $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lambda \in R$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - \lambda x] = \beta \in R$,

Αντιστοίχως $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lambda \in R$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - \lambda x] = \beta \in R$

ΣΧΟΛΙΑ

1. Αποδεικνύεται ότι:

— Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 δεν έχουν ασύμπτωτες.

— Οι ρητές συναρτήσεις $\frac{P(x)}{Q(x)}$, με βαθμό του αριθμητή $P(x)$ μεγαλύτερο τουλάχιστον κατά δύο του βαθμού του παρονομαστή, δεν έχουν πλάγιες ασύμπτωτες.

2. Σύμφωνα με τους παραπάνω ορισμούς, ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f αναζητούμε:

— Στα άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού της στα οποία η f δεν ορίζεται.

— Στα σημεία του πεδίου ορισμού της, στα οποία η f δεν είναι συνεχής.

— Στο $+\infty$, $-\infty$, εφόσον η συνάρτηση είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(\alpha,+\infty)$, αντιστοίχως $(-\infty,\alpha)$.

69 . Να διατυπώσετε τους κανόνες de l'Hospital

ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο (μορφή $\frac{0}{0}$)

Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$, $x_0 \in \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο (μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$)

Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$, $\mathbf{x_0} \in \mathrm{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

ΣΧΟΛΙΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ

Η μελέτη της μονοτονίας μιας συνάρτησης γίνεται ως εξής:

1. Βρίσκουμε τη πρώτη παράγωγο της συνάρτησης.
2. Βρίσκουμε το πρόσημο της πρώτης παραγώγου.
3. Στα διαστήματα που η πρώτη παράγωγο είναι θετική η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα, ενώ στα διαστήματα που είναι αρνητική είναι γνησίως φθίνουσα.

ΣΧΟΛΙΑ ΓΙΑ ΤΑ ΑΚΡΟΤΑΤΑ

Για την εύρεση των τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης f εργαζόμαστε ως εξής:

1. Βρίσκουμε την f'
2. Βρίσκουμε τις ρίζες της f'

3. Βρίσκουμε το πρόσημο της f’
4. Αν χ_0 είναι ρίζα της f’ κι αριστερά του χ_0 το πρόσημο της f’ είναι (+) και δεξιά (-), τότε η f παρουσιάζει στο χ_0 τοπικό μέγιστο το f(χ_0).
5. Αν χ_0 είναι ρίζα της f’ κι αριστερά του χ_0 το πρόσημο της f΄΄είναι (-) και δεξιά (+), τότε η f παρουσιάζει στο χ_0 τοπικό ελάχιστο το f(χ_0).
6. Αν εκατέρωθεν του χ_0 η f’ δεν αλλάζει πρόσημο τότε στο χ_0 η f δεν παρουσιάζει ακρότατο.
7. Η αναζήτηση των σημείων του πεδίου ορισμού στα οποία μια συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα γίνεται:
. Στις ρίζες της f’
. Στα σημεία του π.ο. που η f δεν παραγωγίζεται
. Στα άκρα των κλειστών διαστημάτων που απαρτίζουν το π.ο.

Παρατηρήσεις για τις παραμετρικές στα ακρότατα
Αν σε μια άσκηση μας ζητούν να βρεθούν οι παραμετρικοί ώστε στο χ_0 να παρουσιάζει ακρότατο εργαζόμαστε ως εξής:
. Αρχικά αναφέρουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη.
. Για να έχει στο χ_0 σημείο ακρότατο η f πρέπει f ΄(χ_0)=0 και εκατέρωθεν του χ_0 η f ΄ να αλλάζει πρόσημο.
. Αφού βρούμε τις παραμέτρους εκμεταλευόμενοι τη σχέση f΄(χ_0)=0 πρέπει να επαληθεύσουμε τον παραπάνω περιορισμό.

<u>ΣΧΟΛΙΑ ΓΙΑ ΤΑ ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΜΠΗΣ</u>
1. Βρίσκουμε την $1^{η}$ και την $2^{η}$ παράγωγο της συνάρτησης.
2. Βρίσκουμε τις ρίζες της $2^{ης}$ παραγώγου
3. Βρίσκουμε το πρόσημο της $2^{ης}$ παραγώγου. Στα σημεία που μηδενίζεται η $2^{η}$ παράγωγος κι αλλάζει πρόσημο, η συνάρτηση παρουσιάζει καμπή. Αν χ_0 είναι ένα τέτοιο σημείο τότε το σημείο καμπής είναι Μ(χ_0,f(χ_0)).

Παρατηρήσεις για τις παραμετρικές στη καμπή
Αν σε μια άσκηση μας ζητούν να βρεθούν οι παραμετρικοί ώστε στο χ_0 να παρουσιάζει καμπή εργαζόμαστε ως εξής:
. Αρχικά αναφέρουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη.
. Για να έχει στο χ_0 σημείο καμπής η f πρέπει f΄΄(χ_0)=0 και εκατέρωθεν του χ_0 η f΄΄ να αλλάζει πρόσημο.
. Αφού βρούμε τις παραμέτρους εκμεταλευόμενοι τη σχέση f΄΄(χ_0)=0 πρέπει να επαληθεύσουμε τον παραπάνω περιορισμό.

<u>ΜΕΛΕΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ</u>
1. Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού
2. Εξετάζουμε αν η συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή.
Αν είναι άρτια, η γραφική της παράσταση έχει άξονα συμμετρίας τον yy’, ενώ αν είναι περιττή, έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή 0 των αξόνων.

3. Εξετάζουμε αν η συνάρτηση είναι περιοδική με περίοδο Τα τότε η μελέτη αυτής γίνεται σε διάστημα του πλάτους Τ.
4. Εξετάζουμε τη συνάρτηση ως προς τη συνέχεια και τη παράγωγο.
5. Βρίσκουμε την $1^η$ παράγωγο τις ρίζες της και το πρόσημο της και με τη βοήθεια αυτών βρίσκουμε τα διαστήματα μονοτονίας το είδος μονοτονίας σε καθένα από αυτά και τα τοπικά ακρότατα.
6. Βρίσκουμε τη $2^η$ παράγωγο τις ρίζες και το πρόσημο της και με τη βοήθεια αυτών μελετάμε τη συνάρτηση ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμπής.
7. Βρίσκουμε τα όρια της συνάρτησης στα άκρα των διαστημάτων που απαρτίζουν το πεδίο ορισμού.
8. Βρίσκουμε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης(πλάγιες, οριζόντιες, κατακόρυφες).
9. Βρίσκουμε τα σημεία που η γραφική παράσταση τη συνάρτηση τέμνει τους άξονες.
10. Κατασκευάζουμε τον πίνακα μεταβολών.
11. Κάνουμε την γραφική παράσταση της συνάρτησης

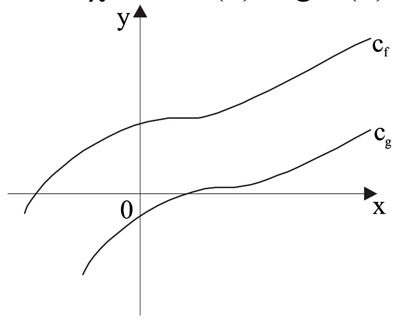
<u>Απαντήστε αν είναι Σωστά ή Λάθος τα παρακάτω</u>

1. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε: $\lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \neq \lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.
2. Αν η f δεν είναι συνεχής στο x_0, τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0.
3. Η συνάρτηση $f(x) = |x| - 2$ είναι συνεχής, αλλά όχι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.
4. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε είναι και συνεχής στο x_0.
5. Αν η f είναι συνεχής στο x_0, τότε είναι και παραγωγίσιμη στο x_0.
6. Αν η C_f δέχεται εφαπτομένη στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$, τότε είναι παραγωγίσιμη στο x_0.
7. Αν η C_f έχει στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ εφαπτομένη την ευθεία $x=x_0$, τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0.
8. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε: $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \in R$.
9. Αν $f(x)=α$, τότε: $f'(x)=0$.
10. Αν $f(α)=α^3$, τότε: $f'(α)=0$.
11. Αν $f(ω) = -\sqrt{ω}$, τότε: $f'(ω) = \frac{1}{2\sqrt{ω}}$.
12. Αν $f(x)=\ln x$, τότε: $f'(1)=1$.
13. Έστω $f(x)=ημx+συνx$. Τότε: $f'(π)=1$.
14. Αν $f(x) = \frac{h(x)}{g(x)}$, τότε: $f'(x) = \frac{h'(x)}{g'(x)}$.
15. Αν $f(x)=g(-x)$, τότε: $f'(x)=g'(-x)$.
16. Αν $h(x) = f(g(x))$, τότε: $h'(x) = f'(g'(x))$.
17. Αν $f(x)=συν^2x$, τότε: $f'(x)=-ημ2x$.
18. Δίνεται η άρτια συνάρτηση $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ με παραγώγους τέταρτης τάξης. Τότε δεν ισχύει: η f’’ είναι άρτια

19. Αν το x_0 είναι ρίζα του πολυωνύμου P(x) πολλαπλότητας 5, τότε το x_0 είναι ρίζα του: $P''(x)$ πολλαπλότητας 3
20. Η κλίση της $f(x) = \ln^3(x+1)$ στο x_0=0 είναι ίση με 0.
21. Η εφαπτομένη της $f(x) = e^{x^2-4}$ στο σημείο $A(2, f(2))$ έχει εξίσωση y=4x-7.
22. Αν $f(x)=(\eta\mu x)^x$, τότε: $f'(x) = x\,(\eta\mu x)^{x-1}$.
23. Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2+x+1}$ έχει στο x_0=0 παράγωγο $f'(0) = \frac{1}{2}$.
24. Αν $f(x\ln x) = e^{x-1} + x$, τότε: $f'(0)=2$.
25. Αν $f(\theta\,°) = \eta\mu\,\theta\,°$ τότε $f'(\theta\,°) = \sigma\upsilon\nu\,\theta\,°$
26. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in R$, τότε ισχύει $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h}$.
27. Αν $f(x) = e^x$, τότε $f'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{e^{x_0+h}-e^{x_0}}{h}$.
28. Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της.
29. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0, τότε ορίζεται πάντα η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(x_0, f(x_0))$.
30. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $M(x_0, f(x_0))$, δεν έχει άλλο κοινό σημείο με την C_f.
31. Αν μια ευθεία (ε) έχει με τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης μόνο ένα κοινό σημείο, τότε είναι οπωσδήποτε εφαπτομένη της.
32. Μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ με $f'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \Delta$. Τότε η γραφική της παράσταση δεν δέχεται οριζόντια εφαπτομένη
33. Οι εφαπτομένες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x) = x^2$, $g(x) = x^2 + 3$, $h(x) = x^2 - 20$ στα σημεία τομής τους με την ευθεία $x = x_0$, είναι παράλληλες.
34. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης μιας σταθερής συνάρτησης σε οποιοδήποτε σημείο της, συμπίπτει με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης.
35. Αν μια συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε δεν είναι συνεχής στο x_0.
36. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε η f' είναι συνεχής στο x_0.
37. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο 2004, τότε $[f(2004)]' = f'(2004)$.

38. Αν το άθροισμα f + g δύο συναρτήσεων είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση στο x_0, τότε και οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο x_0.
39. Σε κάθε χρονική στιγμή ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας ενός κινητού είναι η επιτάχυνση αυτού.
40. Αν $f(x) = x^4$, τότε υπάρχουν σημεία της C_f με παράλληλες εφαπτομένες.
41. Αν $f'(x) = 3x^2$, τότε ισχύει πάντα $f(x) = x^3$.

42. Στο σχήμα η γραφική παράσταση της g προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της C_f. Ισχύει $f'(x) = g'(x)$, για κάθε x στο κοινό πεδίο ορισμού τους.

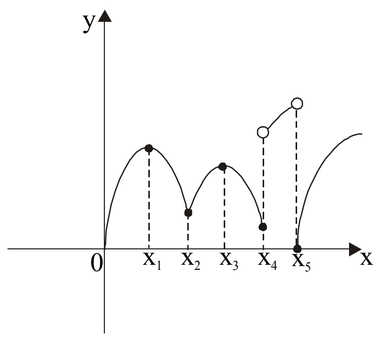


43. Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f έχει εφαπτομένη στο x_0 την ευθεία $y = \alpha x + \beta$, με $\alpha \neq 0$, όταν $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \alpha$

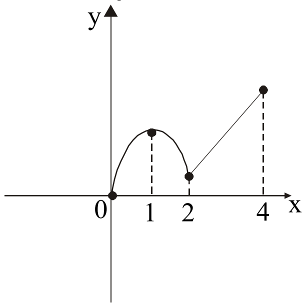
44. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f δέχεται οριζόντια εφαπτομένη στο $A(x_0, f(x_0))$, όταν $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$

45. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με $f'(x_0) = 0$, τότε η γραφική της παράσταση στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ δέχεται εφαπτομένη της μορφής $y = \alpha x + \beta$, $\alpha \neq 0$

46. Η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f είναι αυτή που φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Τότε λάθος είναι ότι
Α. η f είναι παραγωγίσιμη στο x_1 Β. η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_2
Γ. η C_f δέχεται εφαπτομένη στο x_3 Δ. η f είναι παραγωγίσιμη στο x_4
Ε. η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_5



47. Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει λύση την
Α. $x = 0$ Β. $x = 1$ Γ. $x = 2$ Δ. $x = 4$ Ε. καμία από τις παραπάνω



48. Οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο R και ισχύει $f'(x_0) = g'(x_0)$ για κάποιο $x_0 \in R$. Τότε Α. $f(x_0) = g(x_0)$ Β. $x_0 \neq 0$
Γ. οι εφαπτομένες των C_f, C_g στα $(x_0, f(x_0))$ και $(x_0, g(x_0))$ αντίστοιχα, είναι παράλληλες Δ. $f''(x_0) = g''(x_0)$ Ε. $f'(x) = g'(x)$, για κάθε $x \in R$.
49. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x_0) = 2$. Η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f στο $(x_0, f(x_0))$ με τον άξονα x΄x είναι περίπου
Α. - 64° Β. 27,3° Γ. 63,4° Δ. 89° Ε. 106,4°
50. Οι συναρτήσεις f, g είναι δυο φορές παραγωγίσιμες στο κοινό πεδίο ορισμού τους R. Για να έχουν κοινή εφαπτομένη στο Α (1, 2), από τις παρακάτω συνθήκες:
Ι. $f'(1) = g'(1)$ ΙΙ. $f(1) = g(1)$
ΙΙΙ. f, g συνεχείς στο $x_0 = 1$ ΙV. $f''(1) = g''(1)$
απαραίτητες είναι
Α. μόνο η Ι Β. μόνο η ΙΙ Γ. οι Ι και ΙΙ Δ. οι ΙΙ και ΙV Ε. Όλες
51. Αν για τις παραγωγίσιμες στο R συναρτήσεις f, g ισχύουν f(0)=4, f'(0)=3, f'(5)=6, g(0)=5, g'(0)=1, g'(4)=2, τότε (fog)' (0)=(gof)'(0).
52. Το $\lim_{h\to 0} \dfrac{\varepsilon\varphi(\frac{\pi}{6}+h) - \varepsilon\varphi\frac{\pi}{6}}{h}$ ισούται με: $\dfrac{4}{3}$
53. Το $\lim_{h\to 0} \dfrac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h}$ ισούται με: $-\dfrac{1}{x^2}$
54. Αν $f(\chi)=5^{3\chi}$ τότε η f'(x) ισούται με: $5^{3\chi}\ln 125$
55. Αν οι εφαπτόμενες των συναρτήσεων $f(\chi)=\ln x$ και $g(\chi)=2\chi^2$ στα σημεία με τετμημένη χ_0 είναι παράλληλες, τότε το χ_0 είναι: $\frac{1}{2}$.
56. Αν $f(\chi)=e^{\beta\chi}$, $g(x)=e^{\alpha\chi}$ και $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, τότε το β ως συνάρτηση του α ισούται με:
$\dfrac{a^2}{a-1}$.

Απαντήστε αν είναι Σωστά ή Λάθος τα παρακάτω

1. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και $f(\alpha) \neq f(\beta)$, $\alpha, \beta \in R$, $\alpha < \beta$, τότε ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$.
2. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και $x_0 \in R$, τότε για κάθε $x \in R$ υπάρχει $\xi \in R$ ώστε $f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0)$.
3. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [α, β] και παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, β), τότε υπάρχει ένα μόνο $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε
$f(\alpha) - f(\beta) = f'(\xi)(\alpha - \beta)$.
4. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [α, β] και παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, β), τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $x_0 \in (\alpha, \beta)$ στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι παράλληλη προς την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία (α, f (α)), (β, f (β)).

5. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [α, β], παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, β) και f (α) = f (β), τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο x_0 εσωτερικό του διαστήματος [α, β], στο οποίο η εφαπτομένη του διαγράμματος της f είναι παράλληλη στον άξονα x΄x.
6. Αν f είναι μια πολυωνυμική συνάρτηση, τότε μεταξύ δύο ριζών της f, υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα της f ΄.
7. Αν f είναι μια πολυωνυμική συνάρτηση, τότε μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της f ΄, υπάρχει το πολύ μια ρίζα της f.
8. Υπάρχουν συναρτήσεις για τις οποίες ισχύει το συμπέρασμα του θεωρήματος Rolle, χωρίς να ισχύουν (όλες) οι υποθέσεις του θεωρήματος.
9. Αν για μια συνάρτηση ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του Fermat, τότε υπάρχει x_0 ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $(x_0, f(x_0))$ να είναι παράλληλη με τον άξονα x΄x.
10. Δίνεται η συνάρτηση f (x) = c, με πεδίο ορισμού το [α, β]. Το πλήθος των σημείων $\xi \in (\alpha, \beta)$ που προκύπτουν από το θεώρημα του Rolle είναι Α. 1 Β. 2 Γ. το πολύ 2 Δ. κανένα Ε. άπειρο
11. Το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού για τη συνάρτηση f (x) = lnx, για κάθε $x_1, x_2 > 0$, εξασφαλίζει ένα ξ μεταξύ των x_1, x_2 ώστε να ισχύει

    Α. $\ln \frac{x_1}{x_2} = \frac{\xi}{x_1 - x_2}$ Β. $\ln \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_1 - x_2}{\xi}$

    Γ. $\ln (x_1 - x_2) = \frac{1}{\xi} (x_1 - x_2)$ Δ. $\ln \frac{x_1}{x_2} = \xi (x_1 - x_2)$

    Ε. $\ln (x_1 - x_2) = \xi (x_1 - x_2)$
12. Αν η f είναι συνεχής στο [α, β] και παραγωγίσιμη στο (α, β), με f(α)=f(β), τότε υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε: f(ξ)=0.
13. Αν η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle, τότε η C_f έχει και οριζόντιες εφαπτόμενες.
14. Η $f(x) = |x - 2004|$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα [2003, 2005].
15. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο R και $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$, τότε η εξίσωση f(x)=0 έχει το πολύ μια ρίζα.
16. Η έκφραση «η εξίσωση f(x)=0 έχει το πολύ δύο ρίζες» σημαίνει ότι η εξίσωση αυτή έχει μεν δύο ρίζες αλλά δεν μπορεί να έχει τρίτη ρίζα.
17. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο [α, β], τότε εφαρμόζεται για την f το Θ.Μ.Τ. στο [α, β].
18. Αν η f είναι συνεχής στο [α, β] και παραγωγίσιμη στο (α, β), τότε υπάρχει εφαπτόμενη της C_f παράλληλη στην ευθεία ΑΒ, με $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$.
19. Αν η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) αλλά είναι συνεχής στο [α, β], τότε δεν υπάρχει οριζόντια εφαπτόμενη της C_f.
20. Υπάρχει συνάρτηση f ¨1-1¨ για την οποία ισχύει το θεώρημα Rolle και σ' ένα διάστημα [α,β].

21. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα [0,1], τότε η εξίσωση $f'(x) = f(1) - f(0)$ έχει λύση στο (0,1)
22. Η f΄ είναι συνεχής στο Δ.
23. Ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής για την παραγωγίσιμη f σε κάθε $[\alpha,\beta] \subseteq \Delta$.
24. Αν f΄(x)=0, για κάθε $x \neq 0$, τότε η f είναι σταθερή.
25. Αν $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in \Delta$, τότε θα ισχύει $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \Delta$.
26. Αν f΄(x)=g΄(x), για κάθε $x \in R$, τότε: $f(x) = g(x) + c$.
27. Θεωρούμε τον περιορισμό της παραβολής $f(x)$ στο διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν $(\gamma, f(\gamma))$, $\gamma \in (\alpha,\beta)$ είναι το σημείο στο οποίο η εφαπτόμενη της $f(x)$ γίνεται παράλληλη της ευθείας που ενώνει τα σημεία $(\alpha, f(\alpha))$ και $(\beta, f(\beta))$, τότε: $\gamma = \alpha + \dfrac{\beta - \alpha}{2}$
28. Αν $f'(x) = \dfrac{1}{x+1}$ για x>-1 και f(0)=0, τότε: $f(x) = \ln(x+1)$.
29. Αν $f'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in R$, τότε: $f(x) = ce^x$, $x \in R$.
30. Αν $f''(x) = 2$ για κάθε $x \in R$, τότε η f είναι της μορφής: $f(x) = x^2 + \alpha x + \beta$.
31. Αν f΄(x)=0 για κάθε $x \neq 2$ και η f είναι συνεχής στο $x_0 = 2$, τότε η f είναι σταθερή.
32. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο [0,1] και ισχύει ότι υπάρχει $x_0 \in (0,1)$, ώστε $f'(x_0) = f(0) - f(1)$, τότε $f'(x_0) = 0$.
33. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R^* και ισχύει $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in R^*$, τότε η f είναι σταθερή στο R^*.
34. Αν η πολυωνυμική συνάρτηση f, με πραγματικούς συντελεστές δεν είναι ¨1-1¨, τότε υπάρχει $x_0 \in R$, ώστε $f'(x_0) = 0$.
35. Αν η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και υπάρχει $x_0 \in \Delta$, ώστε $f'(x_0) = 0$, τότε υπάρχουν $\alpha, \beta \in \Delta$, με $\alpha < \beta$, ώστε $f(\alpha) = f(\beta)$.
36. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο [α,β] με $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$, τότε η f δεν ικανοποιεί στο [α,β] τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle.
37. Αν η f: $R^* \to R$ είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in R^*$, τότε: $f(x) = \begin{cases} c_1 & ,x > 0 \\ c_2 & ,x > 0 \end{cases}$
38. Αν η f: $R \to R$ είναι παραγωγίσιμη, με f(1)=1 και $f'(x) = |x|$ για κάθε $x \in R$, τότε: $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{2} & ,x \geq 0 \\ -\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{2} & ,x < 0 \end{cases}$$
39. Υπάρχει συνάρτηση f: $R \to R$ γνησίως μονότονη, η οποία σε κάποιο διάστημα [α,β] ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle.
40. Υπάρχει συνάρτηση f: $R \to R$ η οποία δεν είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, αλλά ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο διάστημα [0,1].
41. Υπάρχει συνάρτηση f: $A \to R$ παραγωγίσιμη και μη σταθερή, ώστε να ισχύει $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in A$.

42. Αν η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε δεν είναι και συνεχής στο x_0.
43. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, με f΄ συνεχή στο x_0, τότε η f έχει δεύτερη παράγωγο στο x_0.
44. Αν η συνάρτηση f+g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$, τότε και οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο $x_0=1$.
45. Αν η συνάρτηση $c \cdot f$, όπου $c \neq 0$ σταθερά, είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$, τότε και η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.
46. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σύνολο Α, με $f'(x)=0$ για κάθε $x \in A$, τότε η f είναι σταθερή στο Α.
47. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ και στο ίδιο διάστημα δεν είναι σταθερή, τότε $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$.
48. Αν μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ, με $f''(x)=0$ για κάθε $x \in \Delta$, τότε η f΄ είναι σταθερή στο Δ.
49. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,1]$, παραγωγίσιμη στο (0,1) και $f'(x) \neq 0$ για όλα τα $\chi \in (0,1)$, τότε $f(0) \neq f(1)$.
50. Αν οι f , g είναι συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο $[a,\beta]$, με f(α)=g(α) και f(β)=g(β) , τότε υπάρχει $\chi_0 \in (a,\beta)$ τέτοιο, ώστε στα σημεία $A(\chi_0,f(x_0))$ και $B(\chi_0,g(x_0))$ οι εφαπτόμενες να είναι παράλληλες.
51. Η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης άρτιου βαθμού έχει πάντοτε οριζόντια εφαπτομένη.
52. Η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης περιττού βαθμού έχει πάντοτε οριζόντια εφαπτομένη.
53. Αν $f'(x) = (x + 8)x^2$, τότε το $x_0 = -8$ είναι θέση τοπικού ελάχιστου.
54. Για τη συνάρτηση $f(x)=5x^2$, $x \in [-3, 2]$, υπάρχει μόνο ένα τοπικό ακρότατο.
55. Δίνεται μια συνεχής συνάρτηση f, με $f'(x) > 0$ για $2 < x < 7$. Αν $f(3) = 5$, τότε μπορεί να ισχύει $f(5) = 4$.
56. Η συνάρτηση $f(x) = ημx + 5e^x$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$, παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0 = \frac{\pi}{3}$.
57. Αν $f'(x) = e^{-5x^2+2005}$, τότε η f δεν μπορεί να έχει τοπικά ακρότατα.
58. Υπάρχει συνάρτηση f με παράγωγο μηδέν και μη σταθερή
59. Η συνάρτηση $\mathbf{f(x)=x^2 \cdot (2005-x)^2}$ είναι γνησίως αύξουσα.
60. Η συνάρτηση $f(x)=x^2$, $x \in [-1,1]$ έχει τοπικό μέγιστο το $f(x_0)=1$, με $f'(x_0)=0$.
61. Ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x^2}=+\infty$.
62. Υπάρχει συνάρτηση f: $R \to R$, με $f'(x)=100$ για κάθε $x \in R$.
63. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ, τότε ισχύει $f'(x)>0$ για κάθε $x \in \Delta$.
64. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 \in \Delta$, τότε ισχύει $f'(x_0)=0$.
65. Η συνάρτηση $f(x)=x^{2003}+\ln x+e^{2004x}$ είναι γνησίως μονότονη.
66. Η εξίσωση $e^x = x+1$ έχει μοναδική ρίζα τη x=0.
67. Η συνάρτηση $f(x)=\ln x - x + 1$ είναι γνησίως μονότονη.

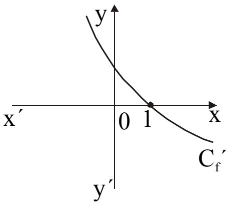
68. Αν $f'(0)=f'(1)=0$ και $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(0,1)$, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο (0,1), όχι όμως γνησίως φθίνουσα στο [0,1].
69. Αν το $f(x_0)$ είναι τοπικό ακρότατο, τότε είναι και ολικό.
70. Κάθε τοπικό μέγιστο είναι μεγαλύτερο από κάθε τοπικό ελάχιστο.
71. Αν η f είναι γνησίως, μονότονη σε ένα διάστημα Δ, τότε η f δεν έχει τοπικά ακρότατα.
72. Αν η f παρουσιάζει στο εσωτερικό σημείο x_0 του διαστήματος Δ τοπικό ακρότατο και είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε: $f'(x_0)=0$.
73. Αν f΄(1821)=0, τότε το f(1821) είναι τοπικό ακρότατο.
74. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β] και γνησίως φθίνουσα στο [β,γ), τότε η f έχει μέγιστο στο (α,γ) τον αριθμό f(β).
75. Αν η f είναι συνεχής στο (α,β) η f΄ έχει πέντε ρίζες στο (α,β) και στα υπόλοιπα σημεία του (α,β) η f΄ έχει σταθερό πρόσημο, τότε η f είναι γνησίως μονότονη στο (α,β).
76. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο [α,β], τότε υπάρχει $x_0\in[\alpha,\beta]$, ώστε το $f(x_0)$ να είναι μέγιστο και να ισχύει $f'(x_0)=0$.
77. Αν η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και $f'(x_0)\neq 0$, με $x_0\in\Delta$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της f.
78. Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R, με $f''(x)>0$ για κάθε $x\in R$, τότε η f δεν έχει τοπικό ακρότατο.
79. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα και παραγωγίσιμη στο [α,β], τότε $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$.
80. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $A=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, με $f'(x)>0$ σ' αυτό και ορίζεται το f(0), τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο R.
81. Αν ισχύει $f''(x)>f'(x)$ για κάθε $x\in\Delta$, όπου Δ διάστημα, τότε η συνάρτηση g, με $g(x)=f'(x)-f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.
82. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σύνολο A, με $f'(x)<0$ για κάθε $x\in A$, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο A.

83. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R, ώστε $x^{2004}\cdot f'(x)\geq 0$ για κάθε $x\in R$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο R.
84. Αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, σ' ένα διάστημα Δ, με $f''(x)>0$ για κάθε $x\in\Delta$, τότε η f΄ είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.
85. Κάθε τοπικό ακρότατο μιας συνάρτησης είναι και ολικό ακρότατο αυτής.
86. Κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση f:$[\alpha,\beta]\to R$ έχει τουλάχιστον ένα τοπικό ακρότατο $f(x_0)$, ώστε $f'(x_0)=0$.
87. Αν για τη συνάρτηση f:$(\alpha,\beta)\to R$ υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f'(x_0)=0$, τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ακρότατο της f.
88. Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση f:$[\alpha,\beta]\to R$ και $x_0\in(\alpha,\beta)$.
    Η f παρουσιάζει μέγιστο και ελάχιστο.
89. Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση f:$[\alpha,\beta]\to R$ και $x_0\in(\alpha,\beta)$.
    Αν $f'(x_0)=0$ και $f''(x_0)>0$, τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f.

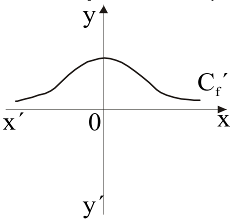
90. Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση f: $[\alpha,\beta] \to R$ και $x_0 \in (\alpha,\beta)$.
Αν $f'(x_0)=0$ και $f''(x_0)=0$, τότε το f(x_0) δεν είναι τοπικό ακρότατο της f.
91. Έστω η συνάρτηση f: $R \to R$, ώστε $f''(x)>0$ για κάθε $x \in R$.
Αν η f έχει ακρότατο, τότε αυτό είναι ελάχιστο.
92. Έστω η συνάρτηση f: $R \to R$, ώστε $f''(x)>0$ για κάθε $x \in R$.
Η f είναι γνησίως μονότονη στο R.
93. Έστω η συνάρτηση f: $R \to R$, ώστε $f''(x)>0$ για κάθε $x \in R$.
Αν f(1)=1 και f(3)=3, τότε f(2)<2.
94. Το μεγαλύτερο τοπικό ακρότατο της f στο [α,β] είναι μέγιστο της f στο [α,β].
95. Ισχύει και γιατί $e^{\pi} > \pi^{e}$
96. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g που είναι παραγωγίσιμες στο πεδίο ορισμού τους. Αν σ' ένα σημείο x_0 παρουσιάζουν και οι δυο τοπικό μέγιστο, τότε και η συνάρτηση f + g, εφόσον ορίζεται, θα παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_0
97. Αν μια άρτια συνάρτηση έχει στο x_0 τοπικό ελάχιστο, τότε στο - x_0 θα έχει τοπικό μέγιστο.
98. Αν για τη συνάρτηση f ισχύει $f'(x) < 0$, $x \in R$, τότε $f(x) < 0$, $x \in R$.
99. Αν για τη συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη στο R, ισχύει $f'(2004) = 0$, τότε η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 2004$.
100. Αν μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο R, τότε θα ισχύει $f'(x) \leq 0$.
101. Για τη συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, ισχύει $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ για κάθε $x \neq 0$. Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο R^*.
102. Αν για μια παραγωγίσιμη στο R συνάρτηση f, ισχύει $f'(x) = e^x$ημ4, τότε η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.
103. Ένα τοπικό μέγιστο μιας συνάρτησης f, μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο της f.

104. Μια συνάρτηση f μπορεί να έχει τοπικό ακρότατο και σε σημείο x_0, στο οποίο δεν είναι συνεχής.
105. Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατο στο x_0, τότε ισχύει $f'(x_0) = 0$.
106. Αν η παράγωγος μιας συνάρτησης είναι μηδέν σε ένα διάστημα Δ, τότε η συνάρτηση είναι σταθερή στο Δ.
107. Αν στο εσωτερικό σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της f ισχύει ότι $f'(x_0) = 0$, τότε το x_0 είναι τοπικό ακρότατο της f.
108. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [α, β], τότε πιθανά ακρότατα της f είναι
α) τα σημεία του διαστήματος (α, β) στα οποία η f ΄ μηδενίζεται
β) τα σημεία του διαστήματος (α, β) στα οποία η f δεν παραγωγίζεται
γ) τα άκρα του [α, β].
109. Αν $f'(x) = (x - 2004)^{2004}$, τότε το σημείο $x_0 = 2004$ είναι θέση τοπικού ακροτάτου της f.
110. Αν $f'(x) = x^{2004} + 1821$, τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει το πολύ μια ρίζα.

111. Αν το διάγραμμα $C_{f}΄$ της παραγώγου μιας συνάρτησης f φαίνεται στο διπλανό σχήμα, τότε η f έχει ακρότατο στο $x_0 = 1$.



112. Αν το διάγραμμα $C_{f}΄$ της παραγώγου μιας συνάρτησης f φαίνεται στο διπλανό σχήμα, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο R.

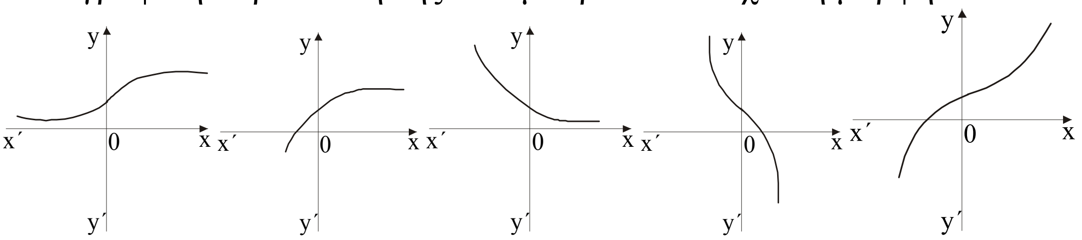


113. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α, β], παραγωγίσιμη στο (α, β) με f (α) = f (β) και $f΄΄(x) > 0$, για κάθε $x \in [α, β]$, τότε η εξίσωση $f΄(x) = 0$ έχει μια μόνο ρίζα στο (α, β).

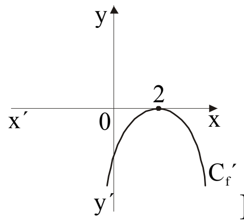
114. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και γνησίως φθίνουσα, τότε
Α. $f΄(x) > 0$, για κάθε $x \in R$ Β. $f΄(x) \geq 0$, για κάθε $x \in R$
Γ. $f΄(x) \leq 0$, για κάθε $x \in R$ Δ. $f΄(x) < 0$, για κάθε $x \in R$
Ε. η $f΄(x)$ δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο R

115. Η παράγωγος $f΄$ της συνάρτησης f είναι ένα πολυώνυμο τρίτου βαθμού. Η f έχει
Α. τρία ακριβώς τοπικά ακρότατα Β. ένα ολικό μέγιστο και ένα ολικό ελάχιστο
Γ. τουλάχιστον τρία τοπικά ακρότατα Ε. τρία το πολύ τοπικά ακρότατα
Δ. ένα μόνο τοπικό μέγιστο και ένα τοπικό ελάχιστο

116. Η συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο R και η $f΄$ είναι γνησίως αύξουσα στο R. Η γραφική παράσταση της f θα μπορούσε να έχει τη μορφή



118.



117. Η γραφική παράσταση $C_f{}'$ της παραγώγου μιας συνάρτησης φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Τότε ισχύει ότι

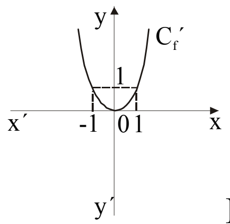
Α. η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 2]$

Β. η f είναι γνησίως φθίνουσα μόνο στο $[2, +\infty)$

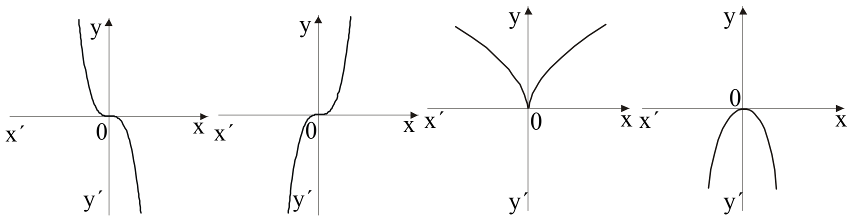
Γ. η f έχει τοπικό μέγιστο το σημείο $x_0 = 2$

Δ. η f έχει τοπικό ελάχιστο το σημείο $x_0 = 2$

Ε. η f είναι γνησίως φθίνουσα στο R

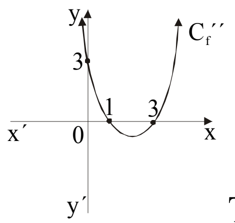


119. Η γραφική παράσταση $C_f{}'$ της παραγώγου μιας συνάρτησης φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Η γραφική παράσταση της f μπορεί να είναι



καμία από τις προηγούμενες

121.



120. Το διάγραμμα $C_f{}''$ της δεύτερης παραγώγου μιας συνάρτησης f φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Η f ΄ είναι γνησίως φθίνουσα στο

Α. $(-\infty, 1]$ Β. $[1, 3]$ Γ. $[3, +\infty)$ Δ. R Ε. $(-\infty, -3]$

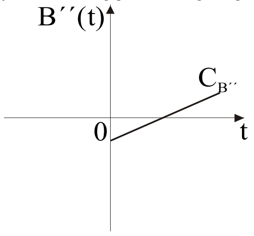
122. Αν η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο $[a, \beta]$ με $f(\beta)<f(\alpha)$, τότε υπάρχει $\chi_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)<0$.

123. Δίνεται ότι η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο R και ότι η γραφική της παράσταση είναι πάνω από τον άξονα χ'χ.
Αν υπάρχει κάποιο σημείο $A(\chi_0,f(x_0))$ της Cf του οποίου η απόσταση από τον άξονα χ'χ είναι μέγιστη (ή ελάχιστη), τότε σε αυτό το σημείο η εφαπτομένη της Cf είναι οριζόντια.
124. Η συνάρτηση $f(\chi)=\chi^3+\chi+1$ έχει: μια, ακριβώς, ρίζα στο (-1,0)
125. Αν $f'(x)>0$ για κάθε $\chi\in[-1,1]$ και $f(0)=0$, τότε: $f(1)>0$.
126. Η συνάρτηση $f(x)=e^x-\ln x$ είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$.
127. Καθε πολυωνυμική συνάρτηση $3^{ου}$ βαθμού παρουσιάζει σημείο καμπής.
128. Αν ισχύει $f''(x_0)=0$, τότε η f παρουσιάζει σημείο καμπής στο $x=x_0$.
129. Αν η συνάρτηση f είναι κυρτή σ' ένα διάστημα Δ, τότε ισχύει $f''(x)>0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ.
130. Μια συνάρτηση f, που δεν έχει $2^η$ παράγωγο σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, μπορεί να παρουσιάζει καμπή στο x_0.
131. Αν μια συνάρτηση f είναι 2 φορές παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β) και για κάποιο $x_0\in(\alpha,\beta)$ ισχύει $f''(x_0)=0$, τότε η f παρουσιάζει καμπή στο x_0.
132. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του διαστήματος Δ και συνεχής στο Δ, τότε η f λέγεται κυρτή.
133. Η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x}$ είναι κυρτή στα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$.
134. Αν η f είναι συνεχής στο Δ και η f΄ είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ, τότε η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω.
135. Αν $f''(x)>0$ σε κάθε x του διαστήματος Δ, τότε η f είναι κυρτή.
136. Αν η f είναι κοίλη στο Δ, τότε: $f''(x)<0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ.
137. Αν η f αλλάζει κοίλα εκατέρωθεν του x_0, τότε το $A(x_0,f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της C_f.
138. Αν $f''(x_0)=0$, $f''(x)<0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)$ και $f''(x)>0$ για κάθε $x\in(x_0,\beta)$, τότε η f είναι κοίλη στο $(\alpha,x_0]$ κυρτή στο $[x_0,\beta)$ και το $A(x_0,f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της C_f.

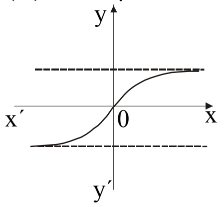
139. Αν $f''(x) = (x - 2004)^{2004}$, τότε η f έχει σημείο καμπής στο $x_0 = 2004$.
140. Αν μια συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ και η f είναι κυρτή στο Δ, τότε $f''(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\Delta$.
141. Το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής μιας συνάρτησης f, όταν η f΄΄ αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0.
142. Έστω μια συνεχής συνάρτηση f, η οποία στρέφει τα κοίλα προς τα άνω σ' ένα διάστημα Δ. Τότε καθώς το x αυξάνει, η κλίση της C_f
Α. αυξάνει Β. ελαττώνεται Γ. μένει σταθερή
Δ. είναι μηδέν Ε. δεν μπορούμε να απαντήσουμε
143. Η συνάρτηση f ορίζεται σε ένα διάστημα Δ και $x_0\in\Delta$. Θεωρούμε τις προτάσεις: Ι. Η C_f δέχεται εφαπτομένη στο $A(x_0, f(x_0))$
ΙΙ. Η f΄ αλλάζει πρόσημο στο x_0 ΙΙΙ. Η f΄΄ αλλάζει πρόσημο στο x_0
Τότε το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της C_f αν ισχύουν οι προτάσεις

Α. Ι και ΙΙ Β. Ι και ΙΙΙ Γ. ΙΙ και ΙΙΙ
Δ. μόνο η ΙΙΙ Ε. μόνο η Ι

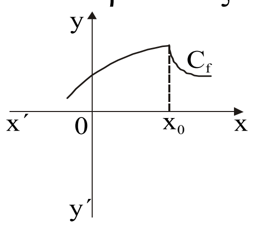
144. Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της Β ΄΄ (t), όπου Β (t) είναι η συνάρτηση του βάρους κάποιου ανθρώπου που βρίσκεται σε δίαιτα, μετά από χρόνο t. Τότε ο ρυθμός μείωσης του βάρους, στην αρχή μειώνεται και μετά αυξάνει.

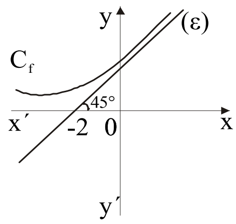


145. Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Τότε ισχύει f ΄΄ (x) < 0 για κάθε x $\in$ (0, + ∞).



146. Μια πολυωνυμική συνάρτηση 3ου βαθμού έχει οπωσδήποτε σημείο καμπής.
147. Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν στο χ_0 σημείο καμπής , τότε και η h=f.g έχει στο χ_0 σημείο καμπής.
148. Η ευθεία χ=1 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης: f(χ)=$\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$
149. Η ευθεία χ=1 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης: g(χ)= $\dfrac{x^2-3x+2}{(x-1)^2}$
150. Η ευθεία y = x + 1 είναι πλάγια ασύμπτωτη της
Α. f (x) = $\dfrac{x^3+x^2-5}{2x^2+3}$ Β. g (x) = x^4 + 5x Γ. h (x) = $\dfrac{1+x^2+x}{x}$
Δ. φ (x) = e^x - 1 Ε. κ (x) = x + ημx
151. Η f παρουσιάζει στο x_0 σημείο καμπής.



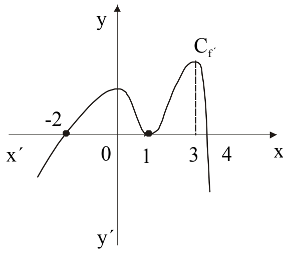


Η ευθεία (ε) είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f. Τότε ισχύει ότι

Α. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ Β. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -2$

Γ. $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$ Δ. $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 1$

Ε. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$



Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της f ΄ μιας συνάρτησης f στο R. Τότε για τη συνάρτηση f ισχύει

Α. στο διάστημα [- 2, 0] η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω

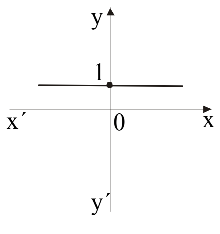
Β. στο διάστημα [1, 3] ισχύει $f''(x) = 0$

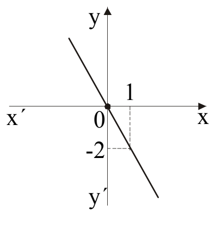
Γ. στο διάστημα [0, 1] η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω

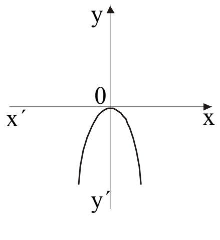
Δ. στο διάστημα [- 2, 1] η f είναι γνησίως φθίνουσα

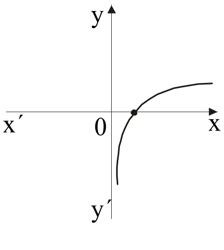
Ε. όλα τα παραπάνω

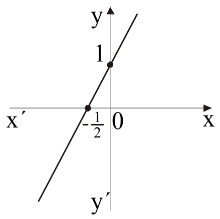
Αν μια συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω, τότε η γραφική παράσταση της f ΄ μπορεί να είναι η

Α. 

Β. 

Γ. 

Δ. 

Ε. 

2006Ε – 2011Ε
2014Ε – 2016Ο

70 . Έστω f μια ορισμένη συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ. τι ονομάζεται αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ.(αντιπαράγωγός)

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. **Αρχική συνάρτηση** ή **παράγουσα της f στο Δ** ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει F ′(x) = f (x) , για κάθε x ε Δ .

<u>**Σχόλιο**</u>: Αποδεικνύεται ότι κάθε συνάρτηση σε διάστημα Δ έχει παράγουσα στο διάστημα αυτό

2003Ε – 2004Ο
2010 – 2015Ε

71.Παράγουσες συνάρτησης

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε

- **όλες οι συναρτήσεις της μορφής** $G(x)=F(x)+c$ **,** $c\in$ **R, είναι παράγουσες της f στο Δ και**
- **κάθε άλλη παράγουσα** G **της f στο Δ παίρνει τη μορφή** $G(x)=F(x)+c$ **,** $c\in$ **R.**

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

• Κάθε συνάρτηση της μορφής $G(x)=F(x)+c$, όπου $c\in$R, είναι μια παράγουσα της f στο Δ, αφού $G'(x)=(F(x)+c)'=F'(x)=f(x)$, για κάθε $x\in\Delta$.

• Έστω G είναι μια άλλη παράγουσα της f στο Δ. Τότε για κάθε $x\in\Delta$ ισχύουν $F'(x)=f(x)$ και $G'(x)=f(x)$, οπότε $G'(x)=F'(x)$, για κάθε $x\in\Delta$.

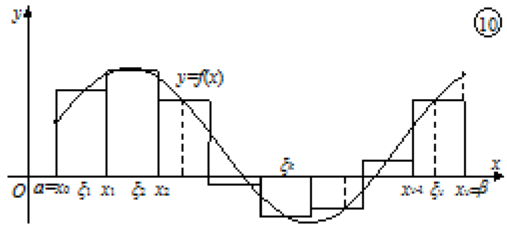
Άρα, σύμφωνα με το πόρισμα της συνέπειες του ΘΜΤ, υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε , $G(x)=F(x)+c$ για κάθε $x\in\Delta$.

72. Πως ορίζεται το αόριστο ολοκλήρωμα $\int$ f(x)dx

Το σύνολο όλων των παραγουσών μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ ονομάζεται **αόριστο ολοκλήρωμα της f στο Δ**, συμβολίζεται $\int f(x)dx$ και διαβάζεται "ολοκλήρωμα εφ του x ντε x". Δηλαδή, $\int f(x)dx = F(x)+c$, $c \in$ R, όπου F μια παράγουσα της f στο Δ.

73. Πως ορίζεται το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta f(x)dx$

Έστω μια συνάρτηση f σ υ ν ε χ ή ς στο $[\alpha,\beta]$. Με τα σημεία $\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_\nu = \beta$ χωρίζουμε το διάστημα $[\alpha,\beta]$ σε ν ισομήκη υποδιαστήματα μήκους $\Delta x = \frac{\beta-\alpha}{\nu}$.



Στη συνέχεια επιλέγουμε αυθαίρετα ένα $\xi_\kappa \in [x_{\kappa-1}, x_\kappa]$, για κάθε $\kappa \in \{1,2,...,\nu\}$, και σχηματίζουμε το άθροισμα

$S_\nu = f(\xi_1)\Delta x + f(\xi_2)\Delta x + \cdots + f(\xi_\kappa)\Delta x + \cdots + f(\xi_\nu)\Delta x$

το οποίο συμβολίζεται, σύντομα, ως εξής: $S_\nu = \sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x$ (1) .

Το όριο του αθροίσματος S_ν, δηλαδή το $\lim_{\nu\to\infty}\left(\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x\right)$ (1) υπάρχει στο R και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των ενδιάμεσων σημείων ξ_κ".

Το παραπάνω όριο (1) ονομάζεται **ορισμένο ολοκλήρωμα** της συνεχούς συνάρτησης f από το α στο β, συμβολίζεται με $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ και διαβάζεται "ολοκλήρωμα της f από το α στο β". Δηλαδή,

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \lim_{\nu\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{\nu} f(\xi_k)\Delta x\right)$$

- $\int_\alpha^\beta f(x)dx = -\int_\beta^\alpha f(x)dx$ $\qquad \int_\alpha^\alpha f(x)dx = 0$ $\qquad \int_\alpha^\beta c\,dx = c(\beta-\alpha)$

74.ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο

Έστω f, g σ υ ν ε χ ε ί ς συναρτήσεις στο $[\alpha,\beta]$ και $\lambda, \mu \in$ R. Τότε ισχύουν

- $\int_\alpha^\beta \lambda f(x)dx = \lambda\int_\alpha^\beta f(x)dx$
- $\int_\alpha^\beta [f(x)+g(x)]dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_\alpha^\beta g(x)dx$

και γενικά

- $\int_\alpha^\beta [\lambda f(x)+\mu g(x)]dx = \lambda\int_\alpha^\beta f(x)dx + \mu\int_\alpha^\beta g(x)dx$

Σχόλιο:

Το σύμβολο $\int$ οφείλεται στον Leibniz και ονομάζεται σύμβολο ολοκλήρωσης. Αυτό είναι επιμήκυνση του αρχικού γράμματος S της λέξης Summa (άθροισμα). Οι αριθμοί α και β ονομάζονται όρια της ολοκλήρωσης. Η έννοια "όρια" εδώ δεν έχει την ίδια έννοια του ορίου του 2ου κεφαλαίου. Στην έκφραση $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ το γράμμα x είναι μια μεταβλητή και μπορεί να αντικατασταθεί με οποιοδήποτε άλλο γράμμα. Έτσι, για παράδειγμα, οι εκφράσεις $\int_\alpha^\beta f(x)dx$, $\int_\alpha^\beta f(t)dt$ συμβολίζουν το ίδιο ορισμένο **ολοκλήρωμα και είναι πραγματικός αριθμός, σε αντίθεση με το $\int f(x)dx$ που είναι ένα σύνολο συναρτήσεων.**

75. ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο

Αν η f είναι σ υ ν ε χ ή ς σε διάστημα Δ και $\alpha,\beta,\gamma \in \Delta$, τότε ισχύει

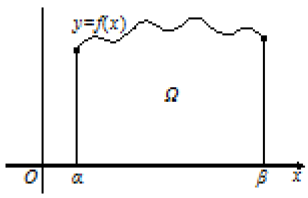
$$\int_\alpha^\beta \mathbf{f(x)dx} = \int_\alpha^\gamma \mathbf{f(x)dx} + \int_\gamma^\beta \mathbf{f(x)dx}$$

76. Γεωμετρική ερμηνεία (ορισμένου ολοκληρώματος)

Αν $f(x) \ge 0$, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx \ge 0$ α<β

Από τους ορισμούς του εμβαδού και του ορισμένου ολοκληρώματος προκύπτει ότι:

Αν $f(x) \ge 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$, τότε το ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ δίνει το εμβαδόν $E(\Omega)$ του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$ Δηλαδή, $\int_\alpha^\beta \boldsymbol{f(x)dx = E(\Omega)}$.



Επομένως, αν $f(x) \ge 0$, τότε $\int_\alpha^\beta \mathbf{f(x)dx \ge 0}$

77.Θεώρημα

Έστω f μια σ υ ν ε χ ή ς συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν $f(x) \ge 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ και η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, τότε

$$\int_\alpha^\beta \mathbf{f(x)dx > 0}.$$

78.ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και α είναι ένα σημείο του Δ, τότε η συνάρτηση $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$, $x\in\Delta$, είναι μια παράγουσα της f στο Δ.
Δηλαδή ισχύει: $\left(\int_{\alpha}^{x} f(t)dt\right)'=f(x)$, για κάθε $x\in\Delta$.

• Από το παραπάνω θεώρημα και το θεώρημα παραγώγισης σύνθετης συνάρτησης προκύπτει ότι: $\left(\int_{\alpha}^{g(x)} \boldsymbol{f(t)dt}\right)'=\boldsymbol{f(g(x))\cdot g'(x)}$,
με την προϋπόθεση ότι τα χρησιμοποιούμενα σύμβολα έχουν νόημα.
Η συνάρτηση $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$, $x\in\Delta$, είναι συνεχής και είναι μια παράγουσα της f στο Δ.

2002 – 2008Ε - 2013 – 2018

79. Να διατυπώσετε το θεώρημα ολοκληρωτικού λογισμού και να το αποδείξετε.

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt=G(\beta)-G(\alpha)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$ είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$.
Επειδή και η G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, θα υπάρχει $c\in$ R τέτοιο, ώστε

$$G(x)=F(x)+c \quad (1)$$

Από την (1), για $x=\alpha$, έχουμε $G(\alpha)=F(\alpha)+c=\int_{\alpha}^{\alpha} f(t)dt+c=c$, οπότε $c=G(\alpha)$.

Επομένως, $G(x)=F(x)+G(\alpha)$, οπότε, για $x=\beta$, έχουμε

$\mathbf{G(\beta)=F(\beta)+G(\alpha)\Rightarrow G(\beta)=\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt+G(\alpha)}$ και άρα

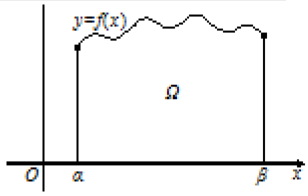
$\mathbf{\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt=G(\beta)-G(\alpha)}$.

Σχόλιο

Οι τύποι της παραγοντικής ολοκλήρωσης και της αντικατάστασης για το ορισμένο ολοκλήρωμα.
Ισχύει ότι: $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx=[f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta}-\int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx$, όπου f', g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha,\beta]$.
Ισχύει ότι: $\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x))g'(x)dx=\int_{u_1}^{u_2} f(u)du$, όπου f, g' είναι συνεχείς συναρτήσεις, $u=g(x)$, $du=g'(x)dx$ και $u_1=g(\alpha)$,

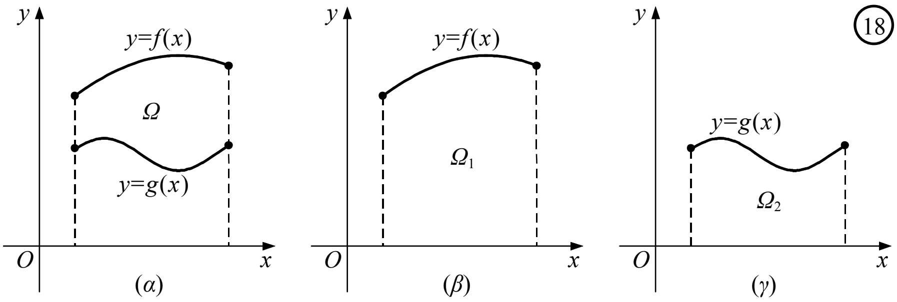
80 . Εμβαδό χωρίου που ορίζεται από δύο θετικές συναρτήσεις

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$ και $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$ και τον άξονα $x'x$ είναι $E(\Omega)=\int_\alpha^\beta f(x)dx$.



81 . Εμβαδό χωρίου που ορίζεται από δύο θετικές συναρτήσεις

Έστω, τώρα, δυο συναρτήσεις f και g, συνεχείς στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ με $f(x)\geq g(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και Ω το χωρίο που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f,g και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$. Να δείξτε ότι $E(\Omega)=\int_\alpha^\beta (f(x)-g(x))dx$



Παρατηρούμε ότι

$$E(\Omega)=E(\Omega_1)-E(\Omega_2)=\int_\alpha^\beta f(x)dx-\int_\alpha^\beta g(x)dx=\int_\alpha^\beta (f(x)-g(x))dx.$$

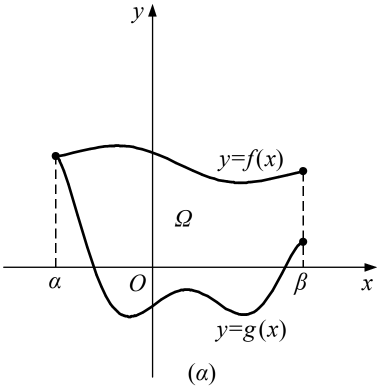
$$\boxed{E(\Omega)=\int_\alpha^\beta (f(x)-g(x))dx}$$

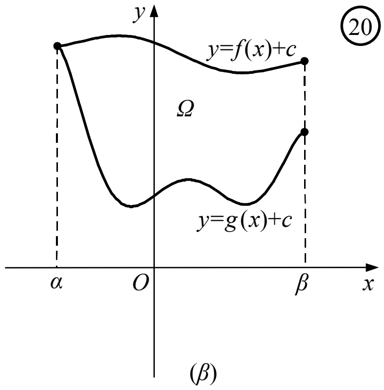
81α . Εμβαδό χωρίου που ορίζεται από δύο συναρτήσεις

Έστω, τώρα, δυο συναρτήσεις f και g, συνεχείς στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ με $f(x)\geq g(x)$ οι f,g μπορεί να είναι και αρνητικές στο $[\alpha,\beta]$.

Για κάθε και Ω το χωρίο που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f,g και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$. Να δείξτε ότι $E(\Omega)=\int_\alpha^\beta (f(x)-g(x))dx$

Επειδή οι συναρτήσεις f,g είναι συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$, θα υπάρχει αριθμός $c\in$ R τέτοιος ώστε $f(x)+c\geq g(x)+c\geq 0$, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$. Είναι φανερό ότι το χωρίο Ω έχει το ίδιο εμβαδόν με το χωρίο Ω'





Επομένως, σύμφωνα με τον τύπο (1), έχουμε:

$E(\Omega)=E(\Omega')=\int_\alpha^\beta [(f(x)+c)-(g(x)+c)]dx=\int_\alpha^\beta (f(x)-g(x))dx$. Άρα, $E(\Omega)=\int_\alpha^\beta (f(x)-g(x))dx$

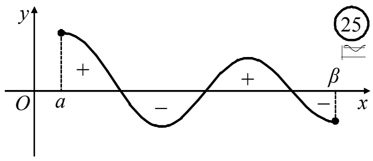
82. Εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τον άξονα $x'x$, τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης g, με $g(x)\le 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$

Πράγματι, επειδή ο άξονας $x'x$ είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=0$, έχουμε $E(\Omega)=\int_\alpha^\beta (f(x)-g(x))dx \;=\int_\alpha^\beta [-g(x)]dx=-\int_\alpha^\beta g(x)dx$.

Επομένως, αν για μια συνάρτηση g ισχύει $g(x)\le 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τότε $E(\Omega)=-\int_\alpha^\beta g(x)dx$

Σχόλιο

Σύμφωνα με τα παραπάνω το $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$.



<u>Απαντήστε αν είναι Σωστά ή Λάθος τα παρακάτω</u>

1. Ισχύει ότι: $\left(\int_x^\alpha f(t)\,dt\right)' = f(x)$, όπου f είναι συνεχής στο R.
2. Αν ισχύει $\int_\beta^\alpha x\,dx = 0$, τότε α=β.
3. Αν ισχύει $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = 1$, τότε α<β.
4. Αν ισχύει $\int_\alpha^\beta ημx\,dx = 0$, τότε συνβ=συνα.
5. Αν F,G είναι παράγουσες των συνεχών f,g στο διάστημα Δ τότε η FG είναι παράγουσα της fg.

6. Αν F,G είναι παράγουσες των συνεχών f,g στο διάστημα Δ τότε η F-G είναι παράγουσα της f-g.
7. Αν F,G είναι παράγουσες των συνεχών f,g στο διάστημα Δ τότε η $\frac{F}{G}$ είναι παράγουσα της $\frac{f}{g}$.
8. Αν $f(x) = \int_0^{x^2} \sqrt{1+t^4}dt$, τότε: $f'(x) = 2x\sqrt{1+x^8}$.
9. Είναι: $\int_0^1 (5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1)\,dx = 5$.
10. Ισχύει ότι: $\int_0^{\pi} ημx\,dx = 0$.
11. Ισχύει ότι: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(ημx)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(συνx)\,dx$.
12. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α,β] και ισχύει $\int_α^β f(x)\,dx \geq 0$ τότε θα ισχύει $f(x) \geq 0$.
13. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α,β] και γε(α,β) τότε θα ισχύει $\int_α^β f(x)\,dx = \int_α^γ f(x)dx - \int_β^γ f(x)dx$.
14. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α,β] τότε θα ισχύει $\int_α^β |f(x)|\,dx = \int_β^α |f(x)|dx$.
15. Αν οι συναρτήσεις f,g είναι συνεχείς στο [α,β] και γε(α,β) τότε θα ισχύει $\int_α^β [f(x) + g(x)]\,dx = \int_α^γ f(x)dx + \int_γ^β g(x)dx$.
16. Αν $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} ημ^4 x\,dx$ και $I_2 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} συν^6 x\,dx$ τότε: $I_2 < I_1$
17. Αν $f(x) = e^{x^2}, g(x) = \sqrt{\ln x}$ και $I = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^e g(x)dx$ τότε ισχύει: $I = e$
18. Να αποδείξετε ότι για κάθε ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f: R \to R$, όπου R το σύνολο των πραγματικών αριθμών, και για κάθε ζευγάρι πραγματικών αριθμών α,β, ισχύει ότι: $\int_α^β [f(x) - f(α + β - x)]dx = 0$
19. Η συνάρτηση F (x) = xlnx - x είναι μια παράγουσα της συνάρτησης f (x) = lnx.
20. Αν F_1, F_2 είναι δυο παράγουσες μιας συνάρτησης f, τότε αυτές διαφέρουν κατά μια σταθερά c.

21. Η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x + 1}{x^2 + 1}$ δεν έχει παράγουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$.

22. Αν f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις, θα ισχύει ο τύπος
$\int f'(x)\, g'(x)\, dx = f'(x)\, g(x) - \int f''(x)\, g(x)\, dx$.

23. Αν f, g είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις, θα ισχύει $\int (f(x)\, g(x))'\, dx = f(x)\, g(x) + c$

24. Αν η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο R, τότε θα ισχύει: $\int f''(x)\, dx = f'(x) + c$.

25. Ισχύει: $\int f(x)\, dx \cdot \int g(x)\, dx = \int (f(x)\, g(x))\, dx$.

26. Για x < 1 το $\int \frac{dx}{x - 1}$ είναι ίσο με ln (1 - x) + c.

27. Αν $f(t) = \int_{\alpha}^{t} x\sqrt{x^2 - 2x}\, dx$, τότε $\int_{\alpha}^{t} x^2 \sqrt{x^2 - 2x}\, dx = x \cdot f(t)$.

28. Αν $f'(x) = \frac{1}{g'(x)}$, τότε $\int f'(x) \cdot g'(x)\, dx = x + c$.

29. Ισχύει: $\int_0^{\alpha} x\, f'(x)\, dx = \alpha\, f(\alpha\alpha - \int_0^{\alpha} f(x)\, dx$.

30. Ισχύει: $\left(\int_{\alpha}^{g(x)} f(t)\, dt\right)' = f(g(x))\, g'(x)$.

31. Ισχύει: $\left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\, dt\right)' = f(h(x))\, h'(x) + f(g(x))\, g'(x)$.

32. Ισχύει $\int_2^4 c\,dx = \int_6^8 c\,dx$, c σταθερά

33. Αν f συνεχής στο R και f (10) = 100, τότε ισχύει:
$100 = f(0) + \int_0^{10} f'(x)\, dx$.

34. Ισχύει: $\int_0^1 \eta\mu x\,dx = 1 - \sigma\upsilon\nu 1$.

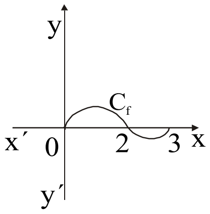
35. Αν $A = \int_0^2 f(x)\, dx$, τότε:
$\int_0^2 f(\omega\omega d\omega = A$, $\int_2^0 f(t)\, dt = -A$, $\int_0^2 (3f(z) - 4)\, dz = 3A - 8$

36. Αν η f είναι περιοδική συνάρτηση στο R με περίοδο Τ, τότε θα ισχύει:
$\int_0^T f(t)\, dt = \int_T^{2T} f(t)\, dt$.

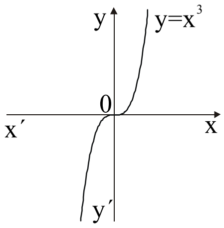
37. Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, dx \geq 0$ τότε f (x) ≥ 0 για κάθε x ∈ [α, β].

38. Αν f (x) ≤ g (x) για κάθε x ∈ [α, β], τότε θα ισχύει ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, dx \leq \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\, dx$.

39. Για τη συνάρτηση του διπλανού σχήματος ισχύει ότι: $\int_0^2 f(x)\, dx < \int_0^3 f(x)\, dx$.



40. Για τη συνάρτηση του σχήματος, ισχύει ότι $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\, dx = 0$, για κάθε α > 0.



41. Αν η f είναι συνεχής στο [α, β], τότε το $\int_{\beta}^{\alpha} f(x)\,dx$ εκφράζει το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ της C_f, του άξονα x΄x και των ευθειών x = α, x = β.

42. Ισχύει: $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (1 - 4\sigma 4\sigma^3 x)\,dx > 0$.

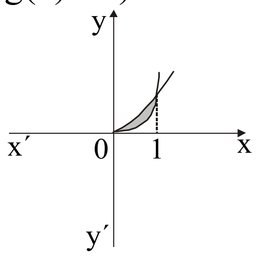
43. Ισχύει: $\int_{1}^{x^2} \frac{1}{t}\,dt = 2\ln x$, x > 0.

44. Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dx$, τότε f (x) = g (x) για κάθε x ∈ [α, β].

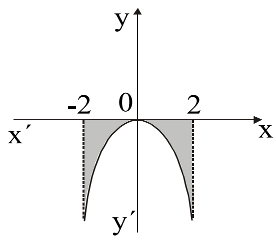
45. Η ιδιότητα του ορισμένου ολοκληρώματος $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)\,dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)\,dx$, ισχύει μόνο εφόσον α < γ < β.

46. Ισχύει: $\int_{\ln\alpha}^{\ln\beta} e^x dx = \beta - \alpha$, α, β > 0.

47. Το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου του σχήματος δίνεται από τη σχέση: E = $\int_{0}^{1} (x^3 - x^2)\,dx$.(Οι γραφικές παραστάσεις στο σχήμα είναι οι f(x)=x^2 και g(x)=x^3).



48. Για το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου που φαίνεται στο σχήμα, ισχύει: E = - $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$.

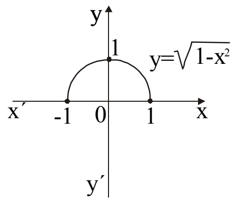


49. Αν $\int_{0}^{5} f(x)\,dx$ = 10, το ελάχιστο της f στο διάστημα [0, 5] δεν μπορεί να είναι 3.

50. Για τη συνάρτηση f (x) = $\sqrt{1 - x^2}$ ισχύει

A. $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0$ B. $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 2$

Γ. $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \frac{\pi}{2}$ Δ. $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \pi$ Ε. $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \pi^2$



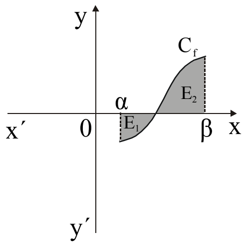
51. Το ολοκλήρωμα $I = \int_{\alpha}^{\beta} \left(f(x)\,g(x)\right)'\,dx$ ισούται με
A. $f'(\beta)\,g(\beta) - f(\alpha)\,g'(\alpha)$ Β. $f(\beta)\,g(\beta) - f(\alpha)\,g(\alpha)$
Γ. $(f\cdot g)(\alpha) - (f\cdot g)(\beta)$ Δ. $f(\beta)\,g'(\beta) - f'(\alpha)\,g(\alpha)$ Ε. $2(\beta - \alpha)$

52. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α, β], τότε η παράσταση $\left(\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx\right)'$ είναι ίση με A. $f(x)$ Β. $f(\beta) - f(\alpha)$ Γ. $(\beta - \alpha)\,f(x)$ Δ. 0
Ε. $F(\beta) - F(\alpha)$ όπου $F(x)$ παράγουσα της f

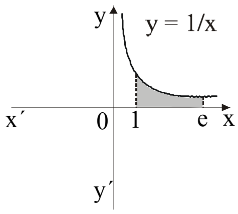
53. Το ολοκλήρωμα $I = \int_{\alpha}^{\beta} f'(g(x))\,g'(x)\,dx$ είναι ίσο με
A. $f'(g(\beta)) - f'(g(\alpha))$ Β. $f(g'(\beta)) - f(g'(\alpha))$
Γ. $f(g(\beta)) - f(g(\alpha))$ Δ. $g(\beta) - g(\alpha)$ Ε. $f(\beta) - f(\alpha)$

54. Το $\int_{\alpha}^{\beta} e^{x^2}dx$ είναι πάντα θετικό

55. Για τη συνάρτηση f του διπλανού σχήματος το $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$ είναι ίσο με
A. $E_1 + E_2$ Β. $\frac{1}{2}(E_2 - E_1)$ Γ. $2E_1 + E_2$ Δ. $\frac{1}{2}(E_1 + E_2)$ Ε. $E_2 - E_1$

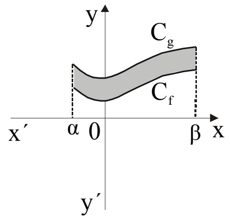


56. Το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου είναι ίσο με
A. e Β. e - 1 Γ. 1 Δ. 1 - e Ε. 2e

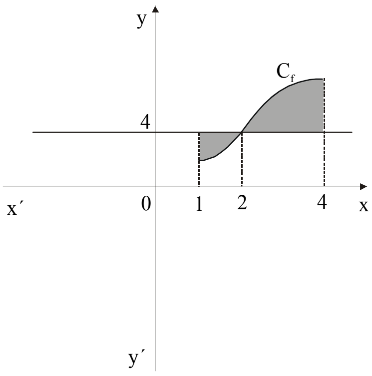


57. Αν $g(x) = f(x) + 1$, το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου είναι ίσο με
A. $\alpha\cdot f(\beta) - \beta\cdot f(\alpha)$ Β. $\beta - \alpha$ Γ. $\alpha\cdot\beta$ Δ. 1 τ.μ. Ε. κανένα από τα

προηγούμενα



58. Το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου του διπλανού σχήματος είναι ίσο με
Α. $\int_1^4 f(x)\,dx$ Β. $\int_1^4 (-f(x))\,dx$ Γ. $\int_1^4 (f(x)-4)\,dx$ Δ. $\int_1^4 (4-f(x))\,dx$
Ε. $\int_1^2 (4-f(x))\,dx + \int_2^4 (f(x)-4)\,dx$



59. Αν $\int_\alpha^\beta f(x)dx = 0$ και η f δεν είναι παντού μηδέν στο $[\alpha,\beta]$, τότε η f παίρνει δυο, τουλάχιστον, ετερόσημες τιμές.
60. Το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^{1}(x^3 - x)dx$ παριστάνει το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(\chi)=\chi^3-\chi$ και τον άξονα των χ.
61. Αν $f'(x)=\eta\mu\pi\chi$ και $f(0)=0$, τότε το $f(1)$ ισούται με $\frac{2}{\pi}$.
62. Το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^{1}|\chi^2 - 1|dx$ είναι ίσο με $\frac{4}{3}$.
63. Αν z ένας μιγαδικός αριθμός και $\bar{z}$ ο συζυγής του, τότε ισχύει $|z| = |\bar{z}| = |-z|$.
64. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Αν $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι κυρτή στο Δ.
65. Για κάθε συνάρτηση f, παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ, ισχύει $\int f'(x)dx = f(x) + c$, $c \in IR$
66. Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται «πάνω» από τη γραφική της παράσταση.
67. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και $f'(x_0) = 0$, τότε η f παρουσιάζει υποχρεωτικά

τοπικό ακρότατο στο x_0.

68. Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο **[α , β]** και συνεχής στο **(α , β]**, τότε
$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \left(\int f(x)\,dx\right)\Big|_{\alpha}^{\beta}$$
69. Η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος δύο μιγαδικών αριθμών είναι το άθροισμα των διανυσματικών ακτίνων τους.
70. Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$, αν και μόνο αν $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = l$.
71. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο χ_0, τότε η συνάρτηση f.g είναι παραγωγίσιμη στο χ_0 και ισχύει: $(f.g)'(x_0)=f'(\chi_0)g'(\chi_0)$
72. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ.Αν $f'(\chi)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο χ του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ.
73. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σ' αυτό, τότε $f'(x)>0$ για κάθε $x \in \Delta$.
74. Αν $f'(x)>0$ για κάθε $x \in IR$, τότε τα σημεία Α(1,2) και Β(2,-4) ανήκουν και τα δύο στη γραφική παράσταση της f.

Βασικές παρατηρήσεις

1. Για να δείξουμε ότι η συνάρτηση f:A $\rightarrow$R είναι "1-1
   α. αρκεί να δείξουμε ότι είναι $f(\chi_1) = f(\chi_2)$ τότε $\chi_1 = \chi_2$.ή $\chi_1 \neq \chi_2$ είναι $f(\chi_1) \neq f(\chi_2)$
   β. Με μονοτονία (συνήθως παράγωγο)
2. Για μια αντιστρέψιμη συνάρτηση f ισχύει η ισοδυναμία: $y=f(x) \Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$.
   α. Αν f(0)=κ και μας ζητούν να βρούμε τις ρίζες της f^{-1} τότε $f^{-1}(\kappa)=0$ και επειδή η f^{-1} είναι 1-1 η μοναδική ρίζα της είναι το κ.
   β. Όταν ζητείτε ο τύπος της αντίστροφης λύνουμε την εξίσωση f(x)=y ως προς x (αφού πρώτα δείξουμε ότι είναι 1-1). Πρέπει να βρούμε το πεδίο ορισμού της f^{-1} που είναι το σύνολο τιμών της f, το f(A) και σύνολο τιμών το πεδίο ορισμού Α της f .
   γ. Σε περίπτωση που οι γραφικές παραστάσεις δύο αντίστροφων συναρτήσεων τέμνονται τότε το κοινό σημείο βρίσκεται πάνω στην y=x.
   Γενικά:
   ➨Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y=x.
   ➨Αν f δεν είναι αντιστρέψιμη τότε δεν είναι «1-1».
   ➨Αν f δεν είναι αντιστρέψιμη τότε δεν είναι γνησίως μονότονη.
   ➨Αν f γνησίως μονότονη συνάρτηση τότε είναι «1-1» και αντιστρέψιμη.
   ➨Αν f είναι αντιστρέψιμη τότε δεν είναι πάντα γνησίως μονότονη.
   ➨Αν f είναι «1-1» δεν είναι άρτια.
   ➨Αν f $\uparrow$ στο Δ τότε και f^{-1} $\uparrow$ στο f(Δ).
   ➨Αν f $\downarrow$ στο Δ τότε και f^{-1} $\downarrow$ στο f(Δ).
   ➨Αν f $\uparrow$ τότε οι εξισώσεις $f(x)=f^{-1}(x)$ και f(x)=x είναι ισοδύναμες (έχουν τις ίδιες λύσεις), δηλαδή τα κοινά σημεία των C_f, C_{f-1} βρίσκονται πάνω στην y=x.

➨Αν ένα σημείο ανήκει στην C_f και την y=x τότε ανήκει και στην C_{f-1} .

➨Η y=x δεν είναι ο μοναδικός άξονας συμμετρίας των C_f, C_{f-1} .

3. Για να ορίζονται οι gof, fog πρέπει να βρεθούν τα πεδία ορισμού τους. Γενικά gof$\neq$fog.
4. ➨Όταν μας δίνεται ότι $\lim\limits_{x\to k} G(f(x))=l$ και ζητείται το $\lim\limits_{x\to k} f(x)$, τότε θέτουμε H(x)=G(f(x)) και λύνουμε ως προς f για να πάρουμε όριο.

   ➨Δεν σπάμε ποτέ τα όρια αν δεν υπάρχουν.

   ➨Για τα όρια των συναρτήσεων $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}\pm(kx+\lambda)]$ τα όρια αυτά δεν υπολογίζονται με DLH αλλά με συζυγή παράσταση μόνο αν καταλήγουν στην απροσδιοριστία 0(±∞) διαφορετικά θα βγεί ±∞.
5. ***<u>Προσοχή!!!</u>*** **Δεν υπάρχουν** τα όρια $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\eta\mu x$ και $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\sigma\upsilon\nu x$. Σε περίπτωση που τα συναντάμε σε κάποια παράσταση χρησιμοποιούμε το Κ.Π. λαμβάνοντας υπόψιν μας τις ιδιότητες: $|\eta\mu x|\le 1$, $|\sigma\upsilon\nu x|\le 1$, $|\eta\mu x|\le|x|$ για κάθε χ. Η ισότητα στην **τελευταία** ανίσωση ισχύει μόνο στο 0.
6. Αν σε κάποια συνάρτηση δεν μπορούμε να βρούμε απευθείας την τιμή της στο χ_o ενδεχομένως να χρειάζεται να υπολογίσουμε το όριό της στο χ_o. Αν έχουμε ότι η συνάρτηση είναι συνεχής στο χ_o , τότε η τιμή της θα συμπίπτει με το όριό της.

   Αν f συνεχής στο χ_o τότε: $f(x_o)=\lim\limits_{x\to x_o} f(x)$**.**
7. ***<u>Αν γνωρίζουμε ότι</u>*** $g(x)\le f(x)$ ***<u>κοντά στο χ_o και</u>*** $\lim\limits_{x\to x_o} g(x)=+\infty$ ***<u>τότε και με δεδομένο ότι θα ισχύει</u>*** $g(x)\le f(x)<+\infty$ ***<u>το συμπέρασμά μας , από το Κ.Π. θα είναι ότι</u>*** $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=+\infty$

   Παρόμοιο συμπέρασμα θα έχουμε και για το - ∞ .
8. Αν έχουμε ζητούμενο : « να δείξετε ότι υπάρχει χ_o ώστε $f(x_0)=k$ ή $f'(x_0)=k$ …» ή « να δείξετε ότι υπάρχει χ_o ώστε οι γραφικές παραστάσεις των f,g έχουν ένα κοινό σημείο ». Ενδεχομένως να χρειάζεται

   μια απλή επίλυση εξίσωσης,

   ➨αν όχι: → μήπως προκύπτει άμεσα από τα δεδομένα;

   ➨αν όχι: →Θεωρήματα: Bolzano

   ➨αν όχι: → Rolle

   ➨αν όχι: → θεώρημα ενδιάμεσων τιμών

   ➨αν όχι: → θεώρημα μέσης τιμής

   ➨αν όχι: → Fermat,

   ➨αν όχι: → σύνολο τιμών

   ➨αν όχι: → ***<u>ο θεός βοηθός!!</u>***
9. ***<u>Αν έχουμε άσκηση με εξίσωση εφαπτομένης</u>***:

   Είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε το σημείο επαφής $(x_o, f(x_o)$.

   Αν δεν δίνεται ή δεν προκύπτει από κάποιο δεδομένο είναι καλό να ξεκινάμε υποθέτοντας «έστω $(x_o, f(x_o)$ το σημείο στο οποίο εφάπτεται η ευθεία η οποία….»

   Μην ξεχνάμε ότι η εφαπτομένη ευθεία έχει συντελεστή διεύθυνσης λ= $f'(x_o)$ και εξίσωση $y-f(x_o)=f'(x_o)(x-x_o)$.

➡Η y=λx+κ είναι εφαπτομένη της γ.π της f στο Μ(α,β) όταν β=f(α), f΄(α)=λ.

➡ε//χ΄χ ⇔ f΄(α)=0.

➡ε//η ⇔ f΄(α)=λ.

➡ε ⊥ η ⇔ f΄(α)= $\frac{1}{\lambda}$.

➡Αν οι γραφικές παραστάσεις των f, g έχουν κοινή εφαπτομένη στο Μ(α,β) τότε β=f(α)=g(α) και f΄(α)=g΄(α).

➡ Αν οι γραφικές παραστάσεις των f, g έχουν κοινή εφαπτομένη σε διαφορετικά σημεία Α(α,f(α)) και Β(β,g(β)) τότε y=f΄(α)x-αf΄(α)+f(α) και y=g΄(β)x-βg΄(β)+g(β) οπότε ταυτίζω τους συντελεστές.

10. Όταν μας δίνεται ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο χ_o τότε μας δίνονται τα όρια: $\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}=f'(x_o)$ καθώς και το $\lim_{x\to x_o}f(x)=f(x_o)$, αφού η συνάρτηση θα είναι και συνεχής.

11. ***<u>Πρόσημο συνάρτησης ή παραγώγων της - Απόδειξη ανισώσεων. (ΑΠΟΔΕΙΧΘΕΙΣΑ ΑΝΙΣΩΣΗ)</u>***

➡**Α. Επίλυση ανίσωσης:** Μπορεί το πρόσημο να προκύπτει άμεσα από την επίλυση μιας εύκολης ανίσωσης ή από τα δεδομένα της άσκησης.

Μην ξεχνάμε το πρόσημο ενός τριωνύμου.

➡**Β. Χρήση Bolzano:** Αν η συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα διάστημα και $\neq$ **0** τότε θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα αυτό. Το πρόσημό της μπορεί να προκύψει αν γνωρίζουμε ή μπορούμε να βρούμε κάποια τιμή της συνάρτησης στο διάστημα αυτό, διαφορετικά απλά διατηρεί σταθερό πρόσημο.

➡**Γ. Χρήση μονοτονίας:** Αν η συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη και κάπου μηδενίζει στο σημείο αυτό αλλάζει πρόσημο

Παράδειγμα: Αν f γνησίως αύξουσα στο IR και $f(x_o)=0$ τότε:

για κάθε χε(-∞,χ_o) ισχύει: $\chi<\chi_o \Leftrightarrow f(x)<f(x_o) \Leftrightarrow f(x)<0$ και

για κάθε χε(χ_o, +∞) ισχύει: $\chi>\chi_o \Leftrightarrow f(x)>f(x_o) \Leftrightarrow f(x)>0$

➡**Δ. Χρήση Θ.Μ.Τ. : Παράδειγμα:** Αν η f κυρτή στο IR και $f(0)=0$ βρείτε το πρόσημο της $g(x)=f(x)-xf'(x)$ Απάντηση: Αν $x<0$ στο διάστημα [χ , 0] ισχύει το Θ.Μ.Τ. οπότε υπάρχει x_o μεταξύ του χ και του 0 ώστε: $f'(x_o)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{f(x)}{x}$. Στο σημείο αυτό χρησιμοποιούμε τη μονοτονία της f' η οποία είναι γνησίως αύξουσα αφού f κυρτή στο IR ως εξής: $\chi<\chi_o<0$ άρα $f'(x)<f'(x_o)<f'(0) \Leftrightarrow$

$f'(x)<\frac{f(x)}{x}<f'(0)$ πολλαπλασιάζουμε την πρώτη ανισότητα με το αρνητικό χ , αλλάζοντας τη φορά της : $xf'(x)>f(x)$ επομένως: $g(x)<0$ για κάθε χε(-∞,0).

Με τον ίδιο τρόπο αν χ>0 θα συμπεράνουμε ότι: $g(x)<0$ για κάθε χε(0,+ ∞).

➡**Ε. Χρήση ακροτάτων:** Αν η συνάρτηση έχει ελάχιστη τιμή έναν αριθμό κ τότε όλες οι τιμές της θα είναι μεγαλύτερες από τον αριθμό αυτό. Αν η συνάρτηση έχει μέγιστη τιμή έναν αριθμό κ τότε όλες οι τιμές της θα είναι μικρότερες από τον αριθμό αυτό.

➡**ΣΤ. Χρήση κυρτότητας:** Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ και Α $(x_o, f(x_o))$ ένα τυχαίο σημείο της με x_o ε Δ τότε η γραφική της παράσταση της f βρίσκεται πιο πάνω από την εφαπτομένη της στο σημείο Α. Αυτό είναι ισοδύναμο με την ανίσωση: $f(x) \geq y$ για κάθε x ε Δ, με $y = f^{/}(x_o(x - x_o) + f(x_o)$ Δηλαδή: $f(x) \geq f^{/}(x_o(x - x_o) + f(x_o)$ για κάθε x ε Δ, η ισότητα ισχύει μόνο στο σημείο επαφής δηλαδή για $x=x_o$.
Ομοίως αν η f είναι κοίλη σε ένα διάστημα Δ: $f(x) \leq f^{/}(x_o(x - x_o) + f(x_o)$ για κάθε x ε Δ, η ισότητα ισχύει μόνο στο σημείο επαφής δηλαδή για $x=x_o$.
➡**Ζ. Το πρόσημο του ορίου:**
<u>Προσοχή!!!</u> Αυτό δίνει το πρόσημο της συνάρτησης **μόνο κοντά στο χ_o.**
➡**Η. Χρήση συνόλου τιμών:** Το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης μας δείχνει ακριβώς ποιες είναι οι τιμές της συνάρτησης οπότε ενδεχομένως να προκύπτει και το πρόσημό της.
➡**Θ. Η ανισότητα του ορισμένου ολοκληρώματος:** Χρησιμοποιείται όταν έχουμε ορισμένο ολοκλήρωμα σε ένα διάστημα [α , β] ή σε διάστημα [α , χ] με χ>α

$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq 0$ **εφόσον** $f(x) \geq 0$ για κάθε χ ε [α , β]. Αν όμως υπάρχει έστω και ένα χ_0 για το οποίο $f(x_0) > 0$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > 0$

12. **Για την απόδειξη της ύπαρξη μιας τουλάχιστον ρίζας κάποιας εξίσωσης ή κάποιου χ_o:**
➡ **Απλά λύνουμε την εξίσωση**. **Προφανής λύση**. **Προκύπτει** άμεσα από τα δεδομένα.
➡ **Bolzano** σε ένα διάστημα. ($f(x_o) = 0$)
➡ **ενδιάμεσων τιμών**
➡ **σύνολο τιμών**($f(x_o) = k$)(Επιμέρους σύνολα τιμών)
➡ **Rolle** σε ένα διάστημα. ($f^{/}(x_o) = 0$)
➡ **Θ.Μ.Τ.** σε ένα διάστημα. ($f^{/}(x_o) = k$)
➡ **Fermat** , εφόσον διαπιστώνεται η ύπαρξη ακρότατου. ($f^{/}(x_o) = 0$)
13. **Για την απόδειξη της μοναδικότητας ρίζας κάποιας εξίσωσης ή κάποιου χ_o**:
➡**Α.** Αν έχουμε λύσει την εξίσωση τότε προκύπτει άμεσα.
➡**Β.** Με τη βοήθεια της μονοτονίας, «1-1»
➡**Γ.** Με τη βοήθεια του **Rolle** , σε **άτοπο.**
14. Όταν σε κάποια άσκηση **μας δίνεται μια ανισότητα** η οποία ισχύει για κάθε τιμή της μεταβλητής που περιέχει τότε:
➡**Α**. Η ανισότητα μπορεί να δίνεται για να χρησιμοποιηθεί για την απόδειξη κάποιου ζητούμενου, π.χ. την εύρεση της μονοτονίας μιας συνάρτησης, την εύρεση μιας άλλης ανισότητας, …..
➡**Β**. Η ανισότητα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να υπολογιστεί κάποιο όριο με τη βοήθεια του κριτηρίου παρεμβολής. ($f^2(x) + g^2(x) \leq x^4$ για κάθε χ τότε f, g συνεχείς , παραγωγίσιμες στο 0;)

➡**Γ**. Η ανισότητα μπορεί να χρησιμοποιηθεί μαζί με την ιδιότητα των ορίων: Αν τα όρια των f,g στο χ_o υπάρχουν και είναι αριθμοί και οι συναρτήσεις κοντά στο χ_o είναι άνισες τότε και τα όριά τους θα είναι ομοιοτρόπως άνισα.

➡**Δ**. *Η ανισότητα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την απόδειξη ότι μια συνάρτηση έχει ελάχιστο ή μέγιστο σε ένα εσωτερικό σημείο ενός διαστήματος στο οποίο αυτή είναι παραγωγίσιμη οπότε ….. FERMAT*.(**ΔΟΣΜΕΝΗ ΑΝΙΣΩΣΗ**)

15. Όταν θέλουμε να δείξουμε ότι **μια συνάρτηση είναι σταθερή, σε ένα διάστημα**, μπορούμε, εφόσον γίνεται, να δείξουμε **ότι είναι παραγωγίσιμη και ότι έχει παράγωγο 0** Αν θέλουμε να δείξουμε ότι **δύο συναρτήσεις είναι ίσες σε ένα διάστημα** , μπορούμε, εφόσον γίνεται, να δείξουμε ότι **η διαφορά τους είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση με παράγωγο 0**, οπότε η διαφορά τους θα είναι c , κατόπιν δείχνουμε ότι το c είναι 0.
16. Κάθε συνάρτηση f συνεχής στο [α , β] **θα έχει ελάχιστη και μέγιστη τιμή**. **Προσοχή έχουμε τοπικά ακρότατα και στα άκρα**.
    Για να είναι συνεχής η f στο [α , β] δεν απαιτείται συνέχεια στα α , β: πρέπει να είναι συνεχής στο (α , β) και $\lim_{x\to\alpha^+} f(x)=f(a)$, $\lim_{x\to\beta^-} f(x)=f(\beta)$.
17. Για να δείξουμε ότι η συνάρτηση f **δεν έχει** τοπικό ή ολικό ακρότατο σε ένα **ανοικτό** διάστημα (α , β) αρκεί να δείξω ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο (α , β) ή , εφόσον γνωρίζουμε, ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο (α , β) να φτάσουμε σε άτοπο με την υπόθεση ότι έχουμε ακρότατο στο χ_o ε (α , β) οπότε από Fermat $f'(x_o)=0$. Με τον ίδιο τρόπο σκεφτόμαστε και για σημείο καμπής.
18. Μια συνάρτηση γνησίως μονότονη στο [α , β] έχει ελάχιστο και μέγιστο στα α , β.
19. **Επιρροή της Μονοτονίας**
    Αν η f γνησίως αύξουσα στο Δ τότε:
    ➡Εξασφαλίζεται ότι η f(x)=0 έχει το πολύ μία ρίζα στο Δ.
    ➡Εξασφαλίζεται ότι η f(x)=0 έχει μοναδική ρίζα στο Δ.
    ➡Τότε η f είναι «1-1». Μπορούμε στο Δ να δείχνουμε ισότητες.
    ➡Μπορούμε να βρούμε το σύνολο τιμών της f, το f(Δ) και αν το 0ε f(Δ) τότε έχει ακριβώς μία ρίζα στο Δ.
    ➡Στηριζόμενοι στο σύνολο τιμών μπορούμε να βρούμε τα ολικά ακρότατα της συνάρτησης αν υπάρχουν.
    ➡Μπορούμε να βρούμε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης αν υπάρχουν.
    ➡Βρίσκουμε το πρόσημο της f(x)=P(x)-Q(x).
    ➡Δείχνουμε (λύνουμε) ανισώσεις P(x)≥Q(x), P(x)≤Q(x).
20. Όταν μας δίνεται ότι η f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ψ=αχ+β τότε μας δίνονται τα όρια: $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(\alpha x+\beta))=0$ (**ορισμός**) ⇔ $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\alpha$ και
    $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-\alpha x)=\beta$
21. Δεν χρησιμοποιώ κανόνα DHL όταν η f είναι παραγωγίσιμη μόνο στο σημείο σύγκλισης, διότι τους κανόνες παραγώγισης τους εφαρμόζω ότν ξέρω ότι μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε διάστημα και όχι σε σημείο.

22. Το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ είναι **ο αριθμός** $F(\beta)-F(\alpha)$, F παράγουσα της συνεχούς *f(x)* .

23. Η συνάρτηση $\int_{a}^{x} f(t)dt$ είναι **παράγουσα** της συνεχούς $f(t)$: $\left(\int_{a}^{x} f(t)dt\right)' = f(x)$

Είναι συνάρτηση με μεταβλητή **το χ** η οποία πρέπει να παίρνει τιμές **στο ίδιο διάστημα με το α** και στο οποίο διάστημα η $f(t)$ ορίζεται και είναι συνεχής.
Να μην συγχέουμε την μεταβλητή του ορισμένου ολοκληρώματος t με την μεταβλητή της συνάρτησης ολοκλήρωμα χ. Η κάθε μία για την άλλη είναι σταθερή – ανεξάρτητη. Το t παίρνει τιμές μεταξύ του α και του χ.
Προσοχή! Οι μεταβλητές μπορεί να δοθούν και ανάποδα!

24. ***Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος***

➨**Α.** Αν παρατηρούμε ότι στο ολοκλήρωμα **υπάρχει μια συνάρτηση και η παράγωγός της** τότε **μάλλον** χεριάζετε να κάνουμε **αντικατάσταση.**

➨**Β.** Αν παρατηρούμε ότι υπάρχει παράσταση της μορφής $f'(x)g(x)$ τότε **μάλλον** χρειάζεται να κάνουμε **κατά παράγοντες**.

➨**Γ.** Αν παρατηρούμε παράσταση της μορφής $f(g(x))$ τότε **μάλλον** χρειάζεται **αντικατάσταση** το $g(x)$

➨**Δ.** Να μην ξεχνάμε, στο ορισμένο ολοκλήρωμα, **να αλλάζουμε τα όρια ολοκλήρωσης** όταν κάνουμε αντικατάσταση.

➨**Ε.** Να μην ξεχνάμε, στο αόριστο ολοκλήρωμα, να αντικαθιστούμε, στο τέλος, το ψ που αντικαταστήσαμε στη μέθοδο αντικατάστασης.

➨**Στ.** Να μην ξεχνάμε, στο αόριστο ολοκλήρωμα, να βάζουμε το c στο τέλος του υπολογισμού του.

➨**Ζ.** Να μην ξεχνάμε το απόλυτο στη συνάρτηση όταν υπολογίζουμε εμβαδό χωρίου και βέβαια ότι το εμβαδό είναι θετικός αριθμός!!

25. Ισχύει : $f(\beta)-f(a)=\int_{a}^{\beta} f'(x)dx$. Χρήσιμο για τον υπολογισμό **τιμών** της συνάρτησης f όταν είναι γνωστός ο ρυθμός μεταβολής της f, οπότε **μπορεί να υπολογιστεί το** $\int_{a}^{\beta} f'(x)dx$**.**

26. Ισχύει : $f(x)-f(a)=\int_{a}^{x} f'(t)dt$. Χρήσιμο για τον υπολογισμό **της συνάρτησης** f όταν είναι γνωστός ο ρυθμός μεταβολής της f και κάποια τιμή της $f(a)$ οπότε **μπορεί να υπολογιστεί το** $\int_{a}^{x} f'(t)dt$.

27. Για τον υπολογισμό **του πεδίου ορισμού** , (**όταν αυτό μας ζητείται ή δεν δίνεται**), της συνάρτησης $\int_{g(x)}^{h(x)} \phi(x) f(t)dt$ και εφόσον η f είναι συνεχής σε ένωση δύο διαστημάτων Δ_1 , Δ_2 , οι συναρτήσεις ϕ, h, g παραγωγίσιμες στα πεδία ορισμού τους **πρέπει να λάβουμε υπόψιν μας τους εξής περιορισμούς για το** χ:
Το χ να ανήκει στα πεδία ορισμού των ϕ, h, g και συγχρόνως $h(x), g(x)$ να ανήκουν και τα δύο στο Δ_1 **ή και τα δύο στο Δ_2**.
Κατόπιν επιλέγοντας **κατάλληλο (;) αριθμό α** θα πρέπει να μετασχηματίσουμε την

συνάρτηση :
$\int_{g(x)}^{h(x)}\phi(x)f(t)dt=\phi(x)\int_{\alpha}^{h(x)}f(t)dt-\phi(x)\int_{a}^{g(x)}f(t)dt$. Ποια θα είναι η παράγωγός της;

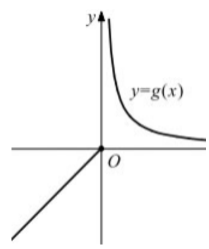
Αντίστροφα θεωρήματα που δεν ισχύουν πάντα

1. Μπορεί η f να είναι ‘1-1» στο Δ χωρίς να είναι γνησίως μονότονη στο Δ.
2. Μπορεί μια συνάρτηση να έχει ρίζα σε ένα διάστημα (α,β), τότε δεν είναι υποχρεωτικά συνεχής και ούτε τα f(α) ,f(β) είναι υποχρεωτικά ετερόσημα (δηλαδή f(α)f(β)<0).
3. Αν f(α)f(β)<0 και f συνεχής στο (α,β) ή στο (α,β] ή στο [α,β) τότε η f δεν έχει πάντα ρίζα στο (α,β).
4. Αν η f δεν είναι συνεχής στο x_o τότε δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_o.
5. Μπορεί μια συνάρτηση να είναι συνεχής στο x_o δέν είναι καί οπωσδήποτε καί παραγωγίσιμη στο x_o.
6. Αν f ΄(x)=0 για x∈Δ=(α,β)U(β,γ) τότε η f δεν είναι πάντα σταθερή στο Δ.
7. Μπορεί μια συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο Δ, η παραγωγός της δεν είναι υποχρεωτικά θετική (f ΄(x)>0) στο εσωτερικό του Δ , μπορεί να είναι και μηδέν f΄(x)≥0.
8. Μπορεί μια συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ, η παραγωγός της δεν είναι υποχρεωτικά αρνητική (f ΄(x)<0) στο εσωτερικό του Δ , μπορεί να είναι και μηδέν f΄(x)≤ 0.
9. Μπορεί μια συνάρτηση f να είναι κυρτή δεν είναι υποχρεωτικά θετική (f ΄΄(x)>0) όμως μπορεί να είναι και μηδέν f΄΄(x)≥0.
10. Μπορεί μια συνάρτηση f να είναι κοίλη δεν είναι υποχρεωτικά αρνητική (f ΄΄(x)<0) όμως μπορεί να είναι και μηδέν f΄΄(x) ≤0.
11. Αν f ΄(x_o)=0 τότε η f δεν παρουσιάζει πάντα ακρότατο στο x_o.
12. Αν f ΄΄(x_o)=0 τότε η f δεν παρουσιάζει πάντα σημείο καμπής στο x_o.

Εκ των ων ουκ άνευ

1. **Αν μια συνάρτηση είναι γνωσίως φθίνουσα κατά διαστήματα, τότε δεν μπορεί να παρουσιάζει ολικό ελάχιστο. Λάθος γιατί η** $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 0 \\ \frac{1}{x}, & x>0 \end{cases}$.
2. **Στις συναρτήσεις μπορούμε να μετασχηματίσουμε πρώτα τον τύπο τους και μετά να βρίσκουμε το πεδίο ορισμού τους;**
   Όχι. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης το βρίσκουμε πριν μετασχηματίσουμε τον τύπο της. Για παράδειγμα , έστω η συνάρτηση με τύπο $f(x)=\frac{x-1}{x^2-1}$.
3. **Αν f,g δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού A και B αντίστοιχα, τότε πότε η gof δεν ορίζεται** Η gof δεν ορίζεται όταν f(A) $\cap$ B=Ø.
4. **Αν f, g δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού A, B αντιστοίχως και ορίζονται οι fog και gof τότε υποχρεωτικά ισχύει fog ≠ gof**
   Λάθος οι συναρτήσεις f(x)=x, g(x)=x ικανοποιούν την σχέση fog=gof.
5. **Αν οι συναρτήσεις f,g είναι ορισμένες στο A και για κάθε xεR , ισχύει f(x)g(x)=0, τότε μπορώ να πω ότι f(x)=0 για κάθε xεR ή g(x)=0 για κάθε xεR;**
   Όχι γιατί υπάρχουν συναρτήσεις που έχουν γινόμενο μηδέν, αλλά αυτές δεν είναι μηδενικές. Για παράδειγμα οι συναρτήσεις: $f(x)=\begin{cases} 2018, & x\le 0 \\ 0, & x>0 \end{cases}$, $f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ 1821, & x>0 \end{cases}$.
6. **Αν για μία συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα διάστημα Δ , τα 1,2εΔ και είναι f(1)<f(2), μπορούμε να πούμε ότι η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.**
   Όχι , αν δεν ξέρουμε ότι η συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη στο Δ.
7. **Όλες οι συναρτήσεις είναι οπωσδήποτε μονότονες στα υποδιαστήματα του πεδίου ορισμού τους;**
   Όχι. Δεν είναι απαραίτητο μία συνάρτηση να είναι μονότονη στο πεδίο ορισμού της.
8. **Υπάρχουν συναρτήσεις που δεν είναι μονότονες σε κανένα υποδιάστημα του πεδίου ορισμού τους.**
   Για παράδειγμα, η συνάρτηση με τύπο $f(x)=\begin{cases} 0, & x\ \rho\eta\tau o\varsigma \\ 1, & x\ \alpha\rho\rho\eta\tau o\varsigma \end{cases}$,συνάρτηση Dirichlet.
9. **Αν μία συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα (ή γνησίως φθίνουσα) σε δύο διαστήματα Δ_1,Δ_2 του πεδίου ορισμού της, σημαίνει ότι θα είναι γνησίως αύξουσα (ή γνησίως φθίνουσα) και στην ένωσή τους $\Delta_1 U \Delta_2$.**
   Όχι παράδειγμα η $f(x)=\frac{1}{x}$.
10. **Η εύρεση του τύπου της αντιστρόφου συνάρτησης βρίσκεται πάντοτε, σε οποιοδήποτε τύπο συνάρτησης;**
    Όχι π.χ $f(x)=3x^5+2x^3+6x+5$

11. **Θέλω να γνωρίζω ως προς τα σημεία τομής των γραφημάτων της f και f^{-1} , τι συμβαίνει όταν:**
α. η είναι γνησίως αύξουσα.
τότε τα σημεία τομής (αν υπάρχουν) των γραφημάτων της και είναι υποχρεωτικά πάνω στη διχοτόμο y=x.
β.η είναι γνησίως φθίνουσα.
τότε τα κοινά σημεία τομής των γραφημάτων της f και f^{-1},αν υπάρχουν, δεν βρίσκονται υποχρεωτικά μόνο πάνω στη διχοτόμο y=x. π.χ $f(x)=-x^2+1$, xε[0, +∞)
12. **Είναι σωστό $f(f^{-1}(x))=x$ xεA.** Λάθος πρέπει xεf(A).
13. **Μία συνάρτηση f που είναι ορισμένη σ΄ ένα διάστημα Δ και είναι 1-1, η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα σε ένα ακριβώς σημείο;**
Όχι, διότι για να ισχύει θα πρέπει το 0εf(A) , πράγμα το οποίο δεν γνωρίζουμε.
14. **Αν x_1,x_2 εAf με $x_1=x_2$ τότε $f(x_1)=f(x_2)$.** Ναι
15. **Αν x_1,x_2 εAf με $x_1 \neq x_2$ τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$.** Όχι $f(x)=x^2$,2≠-2 ενώ f(2)=f(-2).
16. **Αν x_1,x_2 εAf με $f(x_1)=f(x_2)$ τότε $x_1=x_2$.** Όχι πρέπει η f «1-1».
17. Από τον ορισμό ότι μια συνάρτηση f είναι 1−1, αν και μόνο αν:**Για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση** $f(x)=y$ **έχει ακριβώς μια λύση ως προς x.**
18. Δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής της παράστασης με την ίδια τεταγμένη. Αυτό σημαίνει ότι **κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο**.
19. **Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη, τότε είναι συνάρτηση** "1−1"**.Το αντίστροφο γενικά δεν ισχύει.** Υπάρχουν δηλαδή συναρτήσεις που είναι 1−1 αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες.
Παράδειγμα
Η συνάρτηση η συνάρτηση $g(x)=\begin{cases} x & , \ x \le 0 \\ \frac{1}{x} & , \ x>0 \end{cases}$ είναι 1−1, αλλά δεν είναι γνησίως μονότονη.



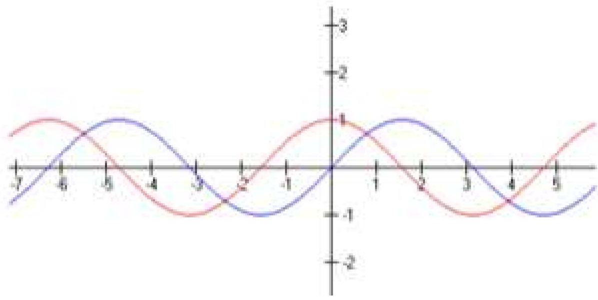
20. **Το $\lim\limits_{x \to x_o} f(x)$ αν υπάρχει, είναι μοναδικό;** Ναι
21. **Η αναζήτηση του ορίου $\lim\limits_{x \to x_o} f(x)$ μιας συνάρτησης στο x= x_o έχει πάντα νόημα;**
Όχι. Πρέπει η συνάρτηση να ορίζεται όσο θέλουμε κοντά στο x= x_o, δηλαδή η f να είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής (a, x_o)U(x_o,b) ή (a, x_o) ή (x_o,b).
22. **Πόσο κάνει το $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{-x^3-x^2}$.**

23. **Για να αναζητήσουμε το $\lim\limits_{x \to x_o} f(x)$, το x_o πρέπει να ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης;**
Δεν είναι απαραίτητο. Αρκεί η συνάρτηση να ορίζεται όσο κοντά θέλουμε στο x_o . Δηλαδή η συνάρτηση να είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(a, x_o)U(x_o,b)$ ή (a, x_o) ή (x_o,b).

24. **Το όριο $\lim\limits_{x \to x_o} f(x)$ της f στο x_o είναι ίσο με την τιμή της f στο x_o;**
Μπορεί να είναι ίσο με την $f(x_o)$ ή διαφορετική από αυτή

25. **Οι ιδιότητες των πράξεων των ορίων ισχύουν πάντα;**
Όχι, βασική προϋπόθεση να υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων
π.χ Δεν υπάρχουν τα $\lim\limits_{x \to 0} f(x), \lim\limits_{x \to 0} g(x)$ **με** $f(x) = \frac{|x|}{x}, g(x) = 2 - \frac{|x|}{x}$ **ενώ υπάρχει το** $\lim\limits_{x \to 0}[f(x) + g(x)]$.

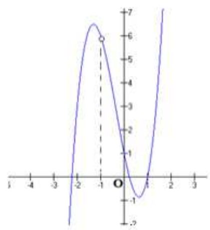
26. **Υπάρχουν τα όρια των τριγωνομετρικών συναρτήσεων $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \eta\mu\, x, \lim\limits_{x \to \pm\infty} \sigma\upsilon\nu\, x$.**



Όχι γιατί είναι περιοδικές συναρτήσεις
Σαν απόδειξη μπορούμε να θεωρήσουμε την εξής: Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$, αποδεικνύεται ότι $f(2x)=2f^2(x)-1$, αν $\lim\limits_{x \to +\infty} \sigma\upsilon\nu\, x = a$.
Τότε $2\alpha^2-\alpha-1=0$, $\alpha=1$ ή $\alpha=1/2$, άτοπο γιατί το όριο είναι μοναδικό.

27. **Τι λέμε απροσδιόριστη μορφή;**
Απροσδιόριστη μορφή λέγεται εκείνη η μορφή για την οποία δεν μπορούμε να βγάλουμε συμπέρασμα, δηλαδή το όριο μπορεί να πάρει οποιοδήποτε αποτέλεσμα. Απροσδιόριστες μορφές είναι : $(+\infty)+(-\infty)$, $0(\pm\infty)$, $(+\infty)-(+\infty)$, $(-\infty)-(-\infty)$, $\frac{0}{0}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

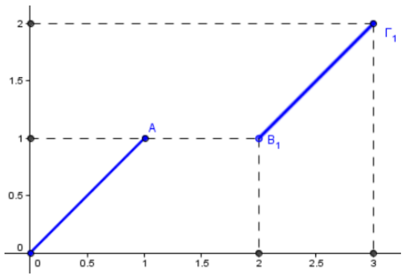
28. **Η συνάρτηση του σχήματος είναι συνεχής στο x_o=-1.**



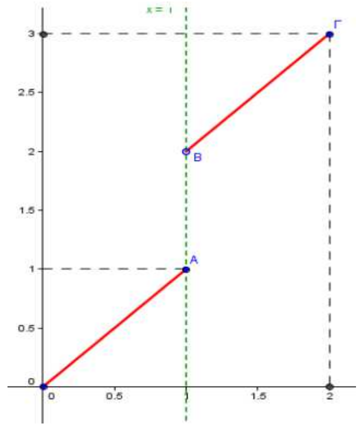
Η ερώτηση δεν έχει νόημα γιατί το x_o=-1 δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης.
Εξετάζουμε τη συνέχεια μιας συνάρτησης μόνο στο πεδίο ορισμού της.

29. **Μια συνεχής συνάρτηση έχει γραφική παράσταση η οποία δεν διακόπτεται ποτέ;**
Κάθε συνεχής συνάρτηση σε διάστημα έχει γραφική παράσταση που δεν διακόπτεται. Σε ένωση διαστημάτων μπορεί να διακόπτεται.

30. **Αν η συνάρτηση f:A→R η οποία είναι συνεχής στο π.ο και έχει αντίστροφη, τότε η αντίστροφη είναι συνεχής;**



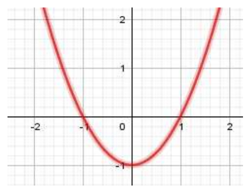
Ψευδής γιατί η $f(x)=\begin{cases} x, & x\varepsilon[0,1] \\ x-1, & x\varepsilon(2,3] \end{cases}$, $f^{-1}(x)=\begin{cases} x, & x\varepsilon[0,1] \\ x+1, & x\varepsilon(1,2] \end{cases}$.



31. **Πότε εφαρμόζουμε το Θεώρημα Bolzano;**
Το Θεώρημα Bolzano (όταν ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του) είναι ένας τρόπος για να αποδεικνύουμε την ύπαρξη μιας τουλάχιστον ρίζας της εξίσωσης f(x)=0 σε κάποιο ανοικτό διάστημα του πεδίου ορισμού της f.

32. **Με το Θεώρημα Bolzano βρίσκουμε τη ρίζα της εξίσωσης f(x)=0;**
Όχι. Το Θεώρημα Bolzano μας εξασφαλίζει την ύπαρξη μιας τουλάχιστον ρίζας της εξίσωσης f(x)=0 , χωρίς όμως να την προσδιορίζει.
Για να βρούμε τη ρίζα ή τις ρίζες πρέπει να λύσουμε την εξίσωση f(x)=0 με τους γνωστούς τρόπους που μάθαμε στην Α΄ και Β΄ Λυκείου. Όταν η εξίσωση δε λύνεται μπορούμε να βρούμε τη ρίζα της εξίσωσης με όποια προσέγγιση θέλουμε με τη βοήθεια του Θεωρήματος Bolzano με διαδοχικές διχοτομήσεις των διαστημάτων.

33. **Για κάθε συνάρτηση f ορισμένη στο [α,β] που η f συνεχής στο [α,β] και f(α)f(β)>0, τότε δεν υπάρχει $x_o\varepsilon[\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε $f(x_o)=0$.**



Λάθος γιατί η $f(x)=x^2-1$ στο [-2,2] είναι f(-2) f(2)=16>0 όμως είναι f(-1)=f(1)=0.

34. **Έστω συνάρτηση f, συνεχής σε ένα διάστημα Δ και f(x)≠0 , για κάθε xεΔ . Τι προκύπτει για το πρόσημο της f στο Δ ;**
Η συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο, δηλαδή οι τιμές της θα είναι θετικές ή αρνητικές. Το ίδιο συμβαίνει και ανάμεσα σε δύο διαδοχικές ρίζες της εξίσωσης f(x)=0
Η παρατήρηση αυτή μας βοηθάει να βρούμε το πρόσημο της συνάρτησης ανάμεσα στις διαδοχικές ρίζες επιλέγοντας ένα αριθμό σε κάθε ένα υποδιάστημα που ορίζουν οι διαδοχικές ρίζες.

35. **Τι κάνουμε όταν μας ζητούν να αποδείξουμε ότι η εξίσωση f(x)=0 , έχει δύο ή περισσότερες ρίζες σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της f;**
Χωρίζουμε το διάστημα σε υποδιαστήματα ανάλογα με το πλήθος των ριζών και εξετάζουμε αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano σε κάθε ένα από τα διαστήματα αυτά.

Ένας άλλος τρόπος είναι να βρούμε τα επί μέρους σύνολα τιμών της f και να εξετάσουμε αν το 0 ανήκει σε αυτά.

36. **Τι κάνουμε όταν μας ζητούν να αποδείξουμε ότι υπάρχει ακριβώς μία ρίζα της εξίσωσης f(x)=0 στο διάστημα (α,β) , που είναι υποσύνολο του πεδίου ορισμού της f;**

Εξετάζουμε αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano στο διάστημα [α,β] , για να εξασφαλίσουμε την ύπαρξη μιας τουλάχιστον ρίζας στο (α,β).

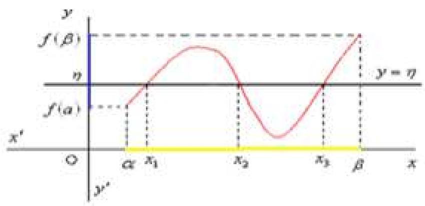
Αποδεικνύουμε την μοναδικότητα της ρίζας , αν η συνάρτηση είναι 1-1 ή γνησίως μονότονη στο δεδομένο διάστημα.

Σχόλιο: Την ύπαρξη της ρίζας μπορούμε να την αποδείξουμε και με το σύνολο τιμών ή με την προφανή λύση.

37. **Όταν μας ζητούν να αποδείξουμε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο τι κάνουμε;**

Ως γνωστόν τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των f και g είναι οι λύσεις της εξίσωσης f(x)=g(x).Αν δεν μπορούμε να λύσουμε την εξίσωση αλγεβρικά , ένα τρόπος λύσης του προβλήματος είναι να θεωρήσουμε τη συνάρτηση h(x)=f(x)-g(x) $x \epsilon A_f \cap A_g$, και να εφαρμόσουμε το Θεώρημα Bolzano σε κατάλληλο διάστημα.

38. **Ποια είναι η γεωμετρική ερμηνεία του Θεωρήματος των ενδιαμέσων τιμών;**



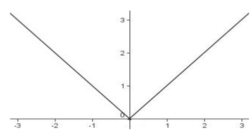
Κάθε ευθεία y=η, ηε[f(α),f(β)] τέμνει τη γραφική παράσταση τουλάχιστον σ' ένα σημείο.

Η σημαντικότερη συνέπεια του Θεωρήματος είναι ότι

Η εικόνα διαστήματος μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης είναι διάστημα (όχι ένωση διαστημάτων)

Η εικόνα κλειστού διαστήματος μέσω συνεχούς συνάρτησης είναι κλειστό διάστημα.

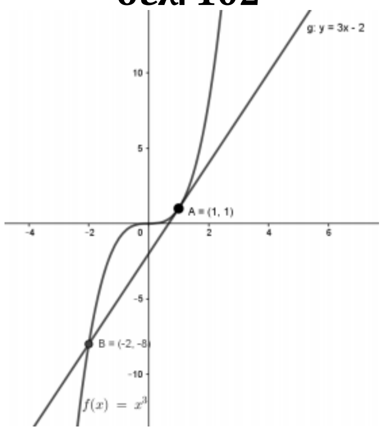
39. **Δίνεται συνάρτηση f(x): A→R η οποία είναι Συνεχής σε ένα σημείο xο, τότε η f θα είναι και είναι καί οπωσδήποτε καί παραγωγίσιμη στο χ_0 .**



Λάθος $\mathbf{f(x)=|x|=\begin{cases} x, & x \ge 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}}$.

40. Μπορεί δύο συναρτήσεις f, g να μην είναι παραγωγίσιμες σε ένα σημείο x_o του πεδίου ορισμού τους και η συνάρτηση f+g να είναι παραγωγίσιμη στο x_o .

Αληθής Οι συναρτήσεις $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ και $g(x)=\begin{cases} x-\sqrt{x}, & x \ge 0 \\ x, & x < 0 \end{cases}$ δεν είναι παραγωγίσιμες στο $x_o=0$. Όμως η συνάρτηση f+g έχει τύπο (f+ g)(x)=x, είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=0$.



41. **Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο Α(xο,f(xο)) μπορεί να έχει και άλλο κοινό σημείο με την γραφική παράσταση της f.**
Αληθής
Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x)=x^3$ και την εφαπτομένη της στο Α(1,1) την y=3x- 2 η οποία τέμνει την C_f και στο σημείο Β(2, 8) όπως βλέπουμε και στο σχήμα.

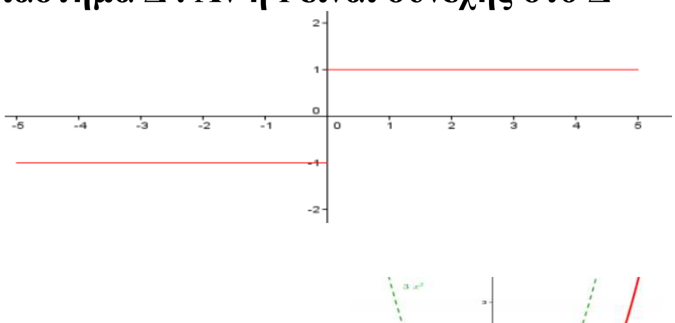
42. **Αν η συνάρτηση f Δ→ R αντιστρέφεται και η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο f(Δ) με f ΄(x)≠0 για κάθε x εΔ, τότε $\left(f^{-1}\right)'(x)=\dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$, xε f(Δ).**
Αληθής Πράγματι: Για κάθε xε f(Δ), ισχύει
$$f\left(f^{-1}(x)\right)=x \Rightarrow \left[f(f^{-1}(x))\right]'=(x)' \Rightarrow f'(f^{-1}(x))\,(f^{-1})'(x))=1 \Rightarrow (f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

43. **Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα [α,β] και γνησίως αύξουσα τότε η f δεν ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος του Rolle.**
Αληθής γιατΙ $α<β \Rightarrow f(α)<f(β)$, άρα $f(α)\neq f(β)$, οπότε η f δεν ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος του Rolle.

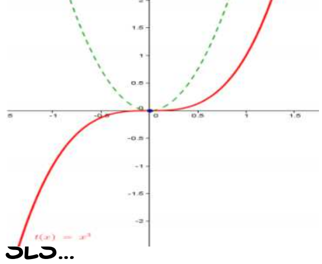
44. **Αν η συνάρτηση f [α,β]→[α,β] ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle τότε και η συνάρτηση g(x)=(fof)(x) ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο διάστημα [α,β] .**
Αληθής γιατΙ η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη , οπότε και η σύνθεση (fof) είναι συνεχής και παραγωγίσιμη. Επίσης ισχύει………….

45. **Δεν μπορεί ταυτόχρονα στο ίδιο διάστημα [α,β] να ισχύουν το Θεώρημα του Rolle και το θεώρημα του Bolzano.**
Αληθής γιατΙ αν ισχύει το θεώρημα του Bolzano έχουμε f(α)f(β)<0(1) και αν ισχύει το θεώρημα του Rolle έχουμε f(α)=f(β) οπότε η (1) $\Rightarrow$ $f^2(α)<0$,άτοπο.

46. **Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν η f είναι συνεχής στο Δ και f΄(x) = 0 για κάθε ε σ ω τ ε ρ ι κ ό σημείο χ του Δ, τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.**
Ισχύει και σε ένωση διαστημάτων το ίδιο.



Ψευδής γιατί η $f(x)=\begin{cases}-1, & x<0\\ 1, & x>0\end{cases}$.



47. **Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ'ένα διάστημα Δ και $χ_0$ ένα <u>εσωτερικό</u> σημείο του Δ. Αν η f είναι <u>παραγωγίσιμη</u> στο σημείο αυτό και f΄($χ_0$)=0 , τότε παρουσιάζει <u>τοπικό ακρότατο</u>**

στο χ_0.

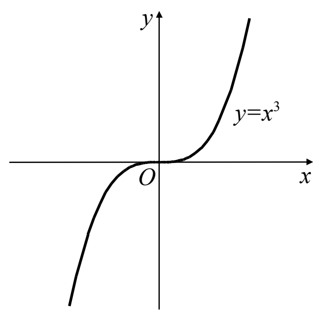
Λάθος π.χ $f(x)=x^3$.

48. Αν η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο Δ, η παραγωγός της είναι υποχρεωτικά θετική στο εσωτερικό του Δ.

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x)=x^3$, αν και είναι γνησίως αύξουσα στο R, εντούτοις έχει παράγωγο $f'(x)=3x^2$ η οποία δεν είναι θετική σε όλο το R, αφού $f'(0)=0$.

Ισχύει όμως $f'(x)\geq 0$ για κάθε $x\in$ R.

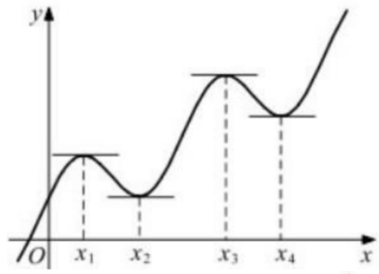
Δηλαδή αν f γνησίως αύξουσα τότε ίσως f(x)≥0.



1.

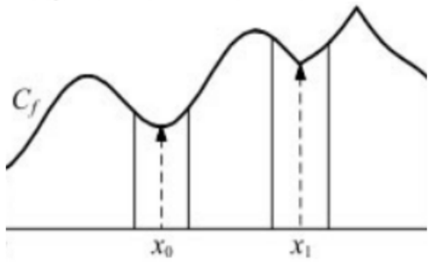
49. **Ένα τοπικό μέγιστο μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο.**

Στην γραφική παράσταση της f(x) με Π.Ο το R η τιμή $f(x_1)<f(x_4)$, δηλ. το τοπικό μέγιστο $f(x_1)$ είναι μικρότερο από το τοπικό ελάχιστο $f(x_4)$.

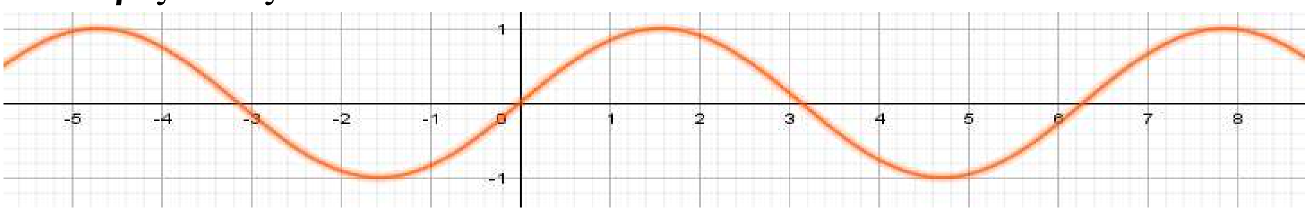


50. **Το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα μιας συνάρτησης δεν είναι πάντοτε ελάχιστο αυτής.**

Στην γραφική παράσταση της f(x) με Π.Ο το R βλέπουμε ότι έχουμε τοπικά ελάχιστα $f(x_0)$,$f(x_1)$, και $f(x_0)<f(x_1)$, αλλά το $f(x_0)$ δεν είναι η ελάχιστη τιμή της f.



51. **Δεν υπάρχουν συναρτήσεις που έχουν ολικά ακρότατα σε άπειρες θέσεις**



Λάθος γιατί η f(x)=ημx στο R έχει άπειρα ολικά ακρότατα

52. **Αν ισχύει f΄(x)<0 και g΄(x)>0για κάθε xεR τότε πάντα οι γραφικές παραστάσεις των f , g θα έχουν τουλάχιστον ένα κοινό σημείο.**

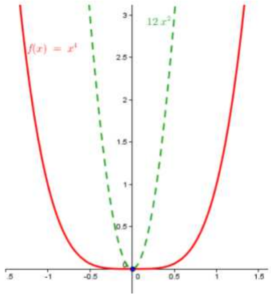
Λάθος Οι συναρτήσεις $f(x)=-e^x$, $g(x)=e^x$, προφανώς δεν έχουν κοινό σημείο αλλά $f΄(x)=-e^x<0$, $g΄(x)=e^x>0$.

53. **Αν η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης που είναι δυο φορές παραγωγίσιμη έχει τρία σημεία συνευθειακά τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα πιθανό σημείο καμπής**

Αληθής γιατI Έστω Α(α,f (α)) , Β(β,f (β)) και Γ(γ,f (γ)) τα τρία συνευθειακά σημεία με α<β<γ. Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ στα διαστήματα [α,β],[β,γ], οπότε υπάρχουν τουλάχιστον, δύο σημεία κ_1ε(α,β), κ_2ε(β,γ) έτσι ώστε οι εφαπτόμενες της C_f στα σημεία

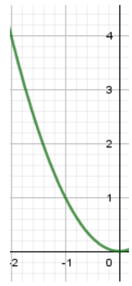
$M(\kappa_1, f(\kappa_1))$, $N(\kappa_2, f(\kappa_2))$, είναι παράλληλες στην ευθείας (ε). Εφαρμόζουμε το Θ. Rolle στο διάστημα $[\kappa_1, \kappa_2]$, άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_o \varepsilon (\kappa_1, \kappa_2) \subseteq \Delta$, έτσι ώστε $f''(x_o)=0$.

54. **Η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$ με α, β, γ, δ ϵ R και $\alpha \neq 0$ έχει πάντα ένα σημείο καμπής και σύνολο τιμών το R .**



55. **Δίνεται συνάρτηση f(x): A →R η οποία στρέφει τα κοίλα άνω δηλ είναι κυρτή στο Πεδίο ορισμού της τότε η $f''(x) > 0$**

Λάθος Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x)=x^4$, αν και είναι κυρτή στο R, εντούτοις έχει παράγωγο $f''(x)=4x^3$ η οποία δεν είναι θετική σε όλο το R, αφού $f''(0)=0$.



56. **Κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση στο Α δεν παρουσιάζει ολικά ακρότατα.**

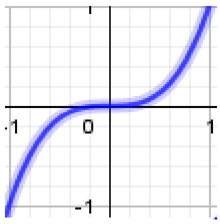
Λάθος γιατί η $f(x)=x^2$, στο $A=[-2,0]$, είναι γνησίως φθίνουσα και στο $x=-2$ παρουσιάζει ολικό μέγιστο το $f(-2)=4$, και στο $x=0$ ολικό ελάχιστο το $f(0)=0$.

57. **Αν η συνάρτηση f ορίζεται στο x_o τότε δεν μπορεί να έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την $x=x_o$.**

Λάθος γιατί η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} 1, & x=0 \\ \frac{1}{x}, & x\neq 0 \end{cases}$,έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την x=0.

Δηλαδή η κατακόρυφη ασύμπτωτη μπορεί να τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο.

58. **Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx=0$, τότε κατ ανάγκη θα είναι f(x)=0 για κάθε xε[α,β].**



Λάθος γιατί η $f(x)=x^3$ στο [-1,1] έχει $\int_{-1}^{1} f(x)dx=0$ όμως $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\varepsilon[-1,1]-\{0\}$.

Ερμηνεία συνθηκών συμβόλων και σχέσεων

1. Συνάρτηση f «1-1» → ∃ f^{-1} και η εξίσωση f(x)=η , έχει το πολύ μία ρίζα
2. Συνάρτηση f γνησίως μονότονη → f «1-1»…. κ.τ.λ. και f↑ μόνο ή f↓ μόνο.
3. f συνεχής και f(x)≠0 ∀ x ε [α,β] → f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο [α,β].
4. f ΄ >0 ή <0 στο διάστημα Δ→ f↑ στο Δ ή f↓ στο Δ.
5. f ΄΄ =0 στο διάστημα Δ → f ΄↑ στο Δ ή f ΄↓ στο Δ και f κυρτή ή f κοίλη στο Δ.
6. f ΄=0 στο διάστημα Δ → f σταθερή στο Δ.
7. f ΄= g ΄ στο διάστημα Δ → f=g+e
8. f ΄=f στο διάστημα Δ→ f(x)=c e^x
9. f ΄΄=g΄΄ στο διάστημα Δ →f ΄ =g΄+c=(g+cx)΄ →f=g+cx+b
10. Όλα τα -6- παραπάνω ισχύουν σε διάστημα και όχι σε ένωση διαστημάτων.
11. f(a)f(b)<0… → θεώρημα Bolzano… ∃ξ... f(ξ)=0 και C_f τέμνει τον χ'χ
12. f(a)=f(b)… → θεώρημα Rolle …. ∃ξ... f ΄(ξ)=0 και εφαπτομένη //x'x.
13. f(a)=f(b)=f(γ)... →2 φορές θεώρημα Rolle στην f…. Και θεώρημα Rolle στην f ΄.
14. Τοπικό ακρότατο στο $χ_0$ ... → θεώρημα Fermat … f ΄(x_0)=0
15. Δίνεται ανισότητα→άρα ορισμός ολικού ακρότατου ... και θεώρημα Fermat…
16. Ζητείται ανισότητα → ΘΜΤ ή μονοτονία ή ολικά ακρότατα ή κυρτότητα και εφαπτομένη ή 2ΘΜΤ και μεθοδολογία ανισότητας Jensen ή ολοκλήρωση ανισότητας
17. Σημείο καμπής στο $χ_0$... → ... f ΄΄(x_0)=0
18. Σχέσεις με 3 τιμές f(a), f(b), f(γ)… → 2 φορές ΘΜΤ ... ή Ενδιάμεσων τιμών
19. Συνάρτηση f άρτια →άξονας συμμετρίας y'y και f(-x)=f(x)…
20. Συνάρτηση f περιττή → κέντρο συμμετρίας Ο(0,0) και f(-x)=-f(x)…
21. C_f πάνω ή κάτω από τον χ'χ→λύνω f(x)>0 ή f(x)<0
22. C_f πάνω ή κάτω από C_g → λύνω f(x)>g(x) ή f(x)<g(x)
23. C_f τέμνει τον άξονα χ'χ σε σημείο Α(x,0) δηλαδή → λύνω f(x) =0
24. C_f τέμνει τον άξονα y'y σε σημείο Α(0,y) δηλαδή →υπολογίζω f(0)=y
25. C_f τέμνει C_g σε σημείο Α(x,y) όπου χ λύση της f(x)=g(x) και y=f(x)=g(x)
26. C_f διέρχεται από το σημείο Α(α,β) → f(α)=β

27. f συνεχής στο α και ψάχνω f(α) → βρίσκω όριο στο α το οποίο ισούται με f(α)
28. Αν έχω διπλή ανισότητα ή $|f(x)|\leq \theta$ και ψάχνω όριο →κριτήριο παρεμβολής.
29. Όριο με ημχ ή συνχ όπου χ τείνει σε άπειρο → χρησιμοποιώ $|ημχ|\leq 1$ ή $|συνχ|\leq 1$ και κατασκευάζω παράσταση που ζητώ το όριο καιμετά κριτήριο παρεμβολής.
30. Όριο με ημχ όπου χ τείνει στο 0 → χρησιμοποιώ βασικά τριγωνομετρικά όρια.
31. Λιμάρω ανίσωση μόνο αν ξέρω ότι υπάρχουν εκατέρωθεν τα όρια.
32. Αν f συνεχής σε κλειστό διάστημα →τότε παίρνει μέγιστη τιμή και ελάχιστη τιμή.
33. Αν f συνεχής και f ↑ στο $\Delta=[\alpha,\beta]$ →τότε σύνολο τιμών $f(\Delta)= [f(\alpha),f(\beta)]$
34. Αν f συνεχής και f ↓ στο $\Delta=[\alpha,\beta]$ →τότε σύνολο τιμών $f(\Delta)= [f(\beta),f(\alpha)]$.
35. Αν $f:\Delta\to R^*$ ή $f(x) \neq 0$ και η συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε χεΔ ή είναι αρνητική για κάθε χεΔ, δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ.
36. Σε καθένα από τα υποδιαστήματα που ορίζουν οι διαδοχικές ρίζες μιάς συνεχούς συνάρτησης, επιλέγουμε έναν αριθμό και βρίσκουμε το πρόσημο της f στον αριθμό αυτό. Το πρόσημο αυτό είναι και το πρόσημο της f στο αντίστοιχο διάστημα.
37. Αν $f(x) \neq 0$ για κάθε χεΔ δεν σημαίνει ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο Δ. (ισχύει αν η f είναι συνεχής).
38. Αν f συνεχής και f ↑ ή f ↓ στο $\Delta=(\alpha,\beta)$ →τότε στο σύνολο τιμών έχω όρια αντί τιμών
39. Αν 0 ανήκει στο σύνολο τιμών της f →τότε η εξίσωση f(x)=0 έχει λύση
40. Αν κ ανήκει στο σύνολο τιμών της f →τότε η εξίσωση f(Δ)=κ έχει λύση
41. Δεν παραγωγίζω ανισώσεις.
42. Σε αρνητικές προτάσεις συνήθως δουλεύω με απαγωγή σε άτοπο. Για παράδειγμα, αν θέλω να δείξω ότι μια συνάρτηση δεν έχει ακρότατα υποθέτω ότι έχει και με βάση θεώρημα Fermat… καταλήγω σε άτοπο. Αν θέλω να δείξω ότι δεν έχει σημείο καμπής υποθέτω ότι έχει και με βάση θεώρημα πρέπει $f''(x_0)=0$ και μετά άτοπο. Αν θέλω μια εξίσωση να έχει το πολύ μία ρίζα δηλαδή όχι δύο ρίζες υποθέτω ότι έχει δύο και καταλήγω με την βοήθεια του θεωρήματος Rolle σε άτοπο.
43. Αν ζητώ παραμέτρους σε κλαδική ώστε f παραγωγίσιμη τότε χρησιμοποιώ πρώτα ότι f συνεχής
44. Αν θέλω όριο κλαδικής σε συνοριακό σημείο ή συνάρτηση με απόλυτα σε σημείο που αλλάζει πρόσημο η συνάρτηση ή συνάρτησης που μηδενίζει ο παρονομαστής και αλλάζει και πρόσημο τότε παίρνω πλευρικά όρια.

45. Αν $f'(x)+f(x)=c$ → πολαπλασιάζω με e^x τότε $[f(x)e^x]'=(ce^x)'$…

46. Αν $f'(x)+g(x)f(x)=0$ → πολαπλασιάζω με $e^{h(x)}$,όπου $h(x)$ παράγουσα της $g(x)$τότε $[f(x)\, e^{h(x)}]'=0$ …

47. Αν $f''(x)=f(x)$ ➡ $f''(x) + f'(x) = f'(x) + f(x)$ → πολαπλασιάζω με e^x και έχω $[f'(x)e^x]' = [e^x f(x)]'$

48. Αν $f''(x)\, f(x)+2[f'(x)]^2=0$ → πολαπλασιάζω με $f(x)$ και έχω $f''(x)\, f^2(x)+2\, f(x)\, [f'(x)]^2=0$ ➡ $[\, f'(x)\, f^2(x)]'=0$.

49. Αν ζητείται η ύπαρξη οριζόντιας εφαπτομένης δηλαδή // x΄x → Rolle.

50. Για ασύμπτωτες βρίσκω π.ο και ψάχνω για κατακόρυφες εφαπτόμενες στα ανοικτά άκρα του π.ο, και για οριζόντιες πλάγιες εργάζομαι συγχρόνως ερμηνεύοντας τα αποτελέσματα των ορίων $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-\lambda\chi\ ]$.

51. Αν f άρτια τότε f΄ περιττή.

52. Αν f περιττή τότε f΄ άρτια και $\int_{-k}^{k} f(x)dx=0$.

53. Πιθανά ακρότα στα άκρα κλειστού διαστήματος ή στα κρίσιμα σημεία δηλαδή στα σημεία που μηδενίζεται η παράγωγος (στάσιμα σημεία) ή δεν υπάρχει παράγωγος.

54. Αν η εφαπτόμενη σχηματίζει γωνία ω με x΄x τότε $\lambda=\varepsilon\varphi\omega=f'(x_o)$.

55. Αν ζητά να δείξω ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη αρκεί να δείξω ότι είναι ασυνεχής.

56. Αν το σύνολο τιμών συνάρτησης ορισμένης σε κλειστό διάστημα [α,β], έχει ένα τουλάχιστον άκρο ανοικτό, τότε δεν παρουσιάζει ελάχιστο ή μεγιστο αντίστοιχα και δεν είναι συνεχής στο [α,β].

57. Αν C_f, C_g τέμνονται κάθετα τότε οι εφαπτόμενες στα κοινά σημεία κάθετες.

58. Αν οι εφαπτόμενες στα x_1,x_2 είναι παράλληλες τότε $f'(x_1)=f'(x_2)$.

59. Αν οι εφαπτόμενες στα x_1,x_2 είναι κάθετες τότε $f'(x_1)\, f'(x_2)=-1$.

60. Αν η f κυρτή τότε η εφαπτόμενη $y=\lambda x+\beta$ είναι κάτω από την C_f και $f(x)\geq \lambda x+\beta$.

61. Αν η f κοίλη τότε η εφαπτόμενη $y=\lambda x+\beta$ είναι πάνω από την C_f και $f(x)\leq \lambda x+\beta$.

62. Αν εμπλέκει κυρτότητα της f και μετά έχει ανισότητα και ιδιέτερα με ολοκλήρωμα, ίσως πρέπει να βρούμε εφαπτόμενη και να πάμε όπως παραπάνω.

63. Αν θέλω το πολύ μία ρίζα δεν χρειάζεται ύπαρξη αλλά απόριψη ύπαρξης 2 ριζών.

64. Με την εύρεση του συνόλου τιμών βρίσκουμε το πλήθος των ριζών της συνάρτησης.

65. Το πρόσημο της f ΄ δίνει την μονοτονία και τα ακρότατα της f.

66. Το πρόσημο της f ΄΄ δίνει την μονοτονία και τα ακρότατα της f ΄ και την κυστότητα και τα σημεία καμπής της f.

67. Οι ρίζα της f ΄ δεν είναι υποχρεωτικά ακρότατο.

68. Οι ρίζα της f ΄΄ δεν είναι υποχρεωτικά σημείο καμπής.

69. Η αναφορά στην μονοτονία και τα ακρότατα θα γίνεται ολογράφως και όχι μέσω του πίνακα μεταβολών.

70. Για να υπολογίσω ορισμένο ολοκλήρωμα πρέπει να έχουμε συνεχή συνάρτηση.

<u>Απαντήστε αν είναι Σωστό ή Λάθος</u>

1. Ισχύει πάντα $\int_\alpha^\beta f^2(t)dt \geq 0$.
2. Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο [α,β] γνησίως αύξουσα και στρέφει τα κοίλα πάνω τότε $\int_\alpha^\beta f''(t)dt + \int_a^\beta f'(t)dt > 0$
3. Αν η f έχει συνεχή παράγωγο στο [α,β] τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx = (\beta - \alpha)f(\beta) - \int_a^\beta (\chi - \alpha)f'(x)dx$
4. Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται πάνω από την γραφική παράσταση της f.
5. Αν f(2008)=f(2009) τότε και f΄(2008)=f΄(2009).
6. Αν f΄(x)≠0 με f΄ συνεχής για κάθε xεR τότε η f είναι «1-1».
7. Αν για τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις f,g ισχύει f΄(x)=g΄(2008x) τότε f(x)=g(2008x)+c.
8. Αν η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο [α,β] με f(β)>0, τότε f(x)>0 για κάθε χε[α,β].
9. Αν f παραγωγίσιμη στο Δ και για εσωτερικό σημείο x_o του Δ ισχύει f΄(x_o)=0, τότε η f παρουσιάζει υποχρεωτικά τοπικό ακρότατο στο x_o.
10. Μια συνεχής συνάρτηση f στο Δ=[α,β] δεν μπορεί να έχει σύνολο τιμών το R.
11. Αν f δεν είναι παραγωγίσιμη στο εσωτερικό σημείο x_o του Δ, και εκατέρωθεν του x_o αλλάζει η κοιλότητα της f τότε η f πάντα δεν παρουσιάζει σημείο καμπής στο x_o.
12. Αν f παραγωγίσιμη στο Δ και για εσωτερικό σημείο x_o του Δ ισχύει f΄΄(x_o)=0, τότε η f παρουσιάζει υποχρεωτικά σημείο καμπής στο x_o.

13. Αν f δεν είναι παραγωγίσιμη στο εσωτερικό σημείο x_o του Δ όμως έχει εφαπτόμενη, και εκατέρωθεν του x_o αλλάζει η κοιλότητα της f τότε η f πάντα δεν παρουσιάζει σημείο καμπής στο x_o.
14. Αν για δύο συναρτήσεις f,g ορίζονται οι fog και gof τότε υποχρεωτικά ισχύει fog ≠ gof.
15. Αν είναι $\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\beta g(x)dx$ τότε f(x)=g(x) για κάθε xε[α,β].
16. Αν f(x)=g(x)-2008 για κάθε xε[0,1] τότε το εμβαδό μεταξύ των C_f,C_g δεν είναι ίσο με -2008.
17. Κάθε συνάρτηση που είναι «1-1» και συνεχής στο πεδίο ορισμού της είναι και γνησίως μονότονη.
18. Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{x}=1$.
19. Αν f είναι συνεχής στο [0,1] με f(0)<0 και υπάρχει x_oε(0,1): f(x_o)=0 τότε υποχρεωτικά ισχύει f(1)>0.
20. Αν $\lim\limits_{x\to2008} f^2(x)=1$ τότε $\lim\limits_{x\to2008} f(x)=\pm1$.
21. Αν $\lim\limits_{x\to2008} f(x)=0$ και $\lim\limits_{x\to2008} g(x)=-\infty$ τότε $\lim\limits_{x\to2008}\frac{g(x)}{f^2(x)}=+\infty$
22. Αν για τους μιγαδικούς z,w ισχύει $|z| = |w|$ τότε θα είναι z=w.
23. Αν είναι $\int_\alpha^\beta f(t)dt \geq 0$ με α<β τότε θα είναι και f(x)≥0 για κάθε xεR.
24. Αν $f(x) = \int_{2008}^x h(t)dt$ και $g(x) = \int_{1821}^x h(t)dt$ για κάθε xεR τότε η συνάρτηση t(x)=f(x)-g(x) είναι σταθερή στο R.
25. Αν για κάθε α,βεR με α≠β ισχύει $\int_\alpha^\beta f'(t)dt \neq 0$, τότε η f είναι «1-1» στο R.
26. Οι συζυγείς μιγαδικοί δεν έχουν εικόνες συμμετρικές ως προς τον ψ΄ψ.
27. Αν f μια συνεχή συνάρτηση στο διάστημα Δ και γεΔ τότε $\left(\int_\gamma^x f(t)dt\right)' = f(x)$.
28. Αν $\lim\limits_{x\to2008} f^2(x)=0$ τότε δεν μπορεί να ισχύει $\lim\limits_{x\to2008} f(x)=0$.
29. Αν f μια συνεχή συνάρτηση στο διάστημα Δ και γεΔ τότε $\left(\int_\gamma^x f'(t)dt\right) = f(x)$.
30. Αν α<β τότε ισχύει $\int_\alpha^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \gamma\, dx = \int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^\beta \gamma\, dx$, όπου γ σταθερά.
31. Αν είναι $\int_\alpha^\beta f(x)dx \leq \int_\alpha^\beta g(x)dx$ τότε f(x)≤g(x) για κάθε xε[α,β].
32. Αν η f είναι συνεχής στο [-4,-1]∪[1,9] τότε το πεδίο ορισμού της $g(x) = \int_{-1}^{-x^2} f(t)dt$ [-2,-1]∪[1,2].
33. Ισχύει $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x^2}=1$.

34. Έστω οι συναρτήσεις f,g:R→R. Αν η συνάρτηση gof είναι «1-1» τότε η συνάρτηση f δεν μπορεί να είναι «1-1».
35. Αν η f είναι συνεχής στο [α,β] με f(α)=0 και f(β)=1 τότε υπάρχει γε[α,β] ώστε f(γ)=ln2.
36. Αν εφαρμόζεται σε μια συνάρτηση f το Θ.Rolle στο [α,β] τότε δεν μπορεί να εφαρμοστεί το Θ.Μ.Τ διαφορικού λογισμού στην f στο [α,β].
37. Αν η f΄΄(x) αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_o τότε το x_o είναι σημείο καμπής για την f.
38. Η συνάρτηση f(x)=$|x|$ είναι συνεχής αλλά όχι παραγωγίσιμη στο x_o=0.
39. Κάθε συνάρτηση που είναι «1-1» στο πεδίο ορισμού της είναι και γνησίως μονότονη.
40. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο R και η f΄(x)=0 έχει μία μόνο ρίζα τότε η εξίσωση f(x)=0 έχει το πολύ δύο ρίζες.
41. Μια συνάρτηση f είναι «1-1» αν και μόνο αν κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της το πολύ σε ένα σημείο.
42. Μια συνάρτηση f δεν είναι «1-1» αν και μόνο αν κάθε κατακόρυφη ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της το πολύ σε ένα σημείο.
43. Αν η f στρέφει τα κοίλα άνω τότε f(x)>0.
44. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο [α,β] με f΄(x)≠0 για κάθε xε[α,β] τότε η δεν έχει ακρότατα.
45. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R τότε η γραφική της παράσταση δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.
46. Αν η παραγωγίσιμη συνάρτηση f παίρνει θετικές τιμές τότε ο ρυθμός μεταβολής της είναι θετικός.
47. Αν $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$ τότε και f(x)=g(x) κοντά στο χ=α.
48. Έστω η συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο [α,β] και xoε[α,β] στο οποίο η f παρουσιάζει ακρότατο τότε ισχύει πάντα f΄(x_o)=0.
49. Αν η f:R→R* είναι συνεχής τότε η f διατηρεί πάντα σταθερό πρόσημο.
50. Αν είναι $\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\gamma f(x)dx$ τότε β=γ.
51. Ισχύει πάντα $\int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_\beta^\alpha f(x)dx = 0$.
52. Αν για τις συνεχής συναρτήσεις f,g ισχύει f(x)≥g(x) για κάθε χεR τότε για κάθε α,βεR: $\int_\alpha^\beta f(x)dx \geq \int_\alpha^\beta g(x)dx$.
53. Αν f μια συνεχή συνάρτηση στο διάστημα Δ και γεΔ τότε $\left(\int_\gamma^x f(t)dt\right)' = f(x) - f(\gamma)$.
54. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R τότε $\int f(x)dx = xf(x) - \int xf'(x)dx$.
55. Αν η f είναι συνεχής στο R τότε για κάθε αεR ισχύει $\lim\limits_{x\to\alpha}\int_\gamma^x f(t)dt = \int_\gamma^\alpha f(t)dt$.

56. Αν υπάρχει το $\lim_{x\to\alpha}|f(x)|$, τότε υπάρχει πάντα και το $\lim_{x\to\alpha}f(x)$.
57. Αν $f^{2008}(x)\le g(x)$ κοντά στο xo και $\lim_{x\to x_o} g(x)=0$ τότε και $\lim_{x\to x_o} f(x)=0$.
58. Ισχύει $(2008^x)'=x\,2008^{x-1}$.
59. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α,β] και f(α)<f(β) τότε το σύνολο τιμών το διάστημα [f(α),f(β)].
60. Αν υπάρχει το $\lim_{x\to\alpha}|f(x)|=0$, τότε ισχύει πάντα $\lim_{x\to\alpha}f(x)=0$.
61. Αν για την συνεχή συνάρτηση f:R→R ισχύουν $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ και $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ τότε η εξίσωση f(x)=0 έχει τουλάχιστον μία ρίζα.
62. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_o f΄ είναι συνεχής στο x_o.
63. Το Θ.Μ.Τ εφαρμόζεται πάντα σε κάθε πολυωνυμική συνάρτηση σε οποιοδήποτε διάστημα [α,β].
64. Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι 1–1, αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες.
65. Αν μια συνάρτηση f είναι κοίλη σ’ ένα διάστημα Δ,τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται κάτω από τη γραφική της παράσταση, με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.
66. Το ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον άξονα x΄x μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα x΄x.
67. Αν α, β πραγματικοί αριθμοί, τότε: α+βi=0 ⇔ α=0 ή β=0
68. Έστω μια συνάρτηση ορισμένη σ’ ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0)\cup(x_0, \beta)$ και χ_0 ένας πραγματικός αριθμός. Τότε ισχύει η ισοδυναμία
$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\right)=l \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}\left(f(x)-l\right)=0$$
69. Αν μια συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ είναι 1−1, τότε για την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} ισχύει: $f^{-1}(f(x))=x,\ x\in A$ και $f(f^{-1}(y))=y,\ y\in f(A)$
70. Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.
71. Αν μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και στρέφει τα κοίλα προς τα άνω, τότε κατ’ ανάγκη θα ισχύει f΄΄(x) > 0 για κάθε πραγματικό αριθμό x.

72. Αν η f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και α,β,γ$\in$Δ τότε ισχύει

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx$$

73. Για κάθε x $\in \mathbb{R}$ισχύει: (ημx)΄ = – συνx.

74. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε x$\in$Δ ή είναι αρνητική για κάθε x$\in$Δ, δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ.

75. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα [α, β] παραγωγίσιμη στο ανοιχτό διάστημα (α, β) και f(α) = f(β) τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, ξ $\in$ (α, β) τέτοιο, ώστε: f΄ (ξ) = 0.

76. Αν f συνάρτηση συνεχής στο διάστημα [α,β] και για κάθε xε[α,β] ισχύει $f(x) \geq 0$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > 0$.

77. Έστω f μια συνάρτηση συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ τότε f΄(x) > 0 σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ.

78. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο x_0 , τότε η σύνθεσή τους gof είναι συνεχής στο x_0 .

79. Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και α είναι ένα σημείο του Δ, τότε $\int_{\alpha}^{g(x)} f(t)dt = f\left(g(x)\right)\cdot g'(x)$ με την προϋπόθεση ότι τα χρησιμοποιούμενα σύμβολα έχουν νόημα.

80. Αν α > 1 τότε $\lim\limits_{x\to-\infty} \alpha^x = 0$.

81. Για κάθε x≠0 ισχύει $\left[\ln|x|\right]' = \dfrac{1}{x}$

82. Μια συνάρτηση f:A → IR είναι 1−1, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση f(x)=y έχει ακριβώς μία λύση ως προς x .

83. Έστω f μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα [α,β]. Αν G είναι μία παράγουσα της f στο [α,β], τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\alpha) - G(\beta)$

84. Για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|z|^2 = z^2$.

85. Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) > 0$ τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0.

86. Η εικόνα f(Δ) ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

87. Ισχύει ο τύπος $\left(3^{x}\right)' = x\cdot 3^{x-1}$, για κάθε x ∈ IR .

88. Ισχύει η σχέση $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx = \left[f(x)g(x)\right]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx$, όπου f', g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο [α,β].

89. Έστω f πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Δ και $x_0 \in \Delta$. Έστω επίσης f(x)≠0 για κάθε x∈Δ. Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ τότε

$$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$$

.

90. Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί. Στο μιγαδικό επίπεδο οι εικόνες Μ(α,β) και Μ΄(α,–β) των συζυγών μιγαδικών $z=\alpha+\beta i$ και $\bar{z}=\alpha-\beta i$ είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον πραγματικό άξονα.

91. Αν μια πραγματική συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0, τότε δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

92. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$ με πεδίο ορισμού Δ = [0, +∞), τότε

$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ για κάθε x ∈ (0, +∞).

93. Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ είναι +∞ ή –∞, τότε η ευθεία $\chi=\chi_0$λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f.

94. Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Αν οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και f΄(x) = g΄(x) για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε x∈Δ ισχύει: f(x) = g(x) + c .

95. Τα εσωτερικά σημεία του διαστήματος Δ, στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το 0, λέγονται κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα Δ.

96. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_o. Αν η f είναι κυρτή στο (α,x_o) και κοίλη στο (x_o,β) ή αντιστρόφως, τότε το σημείο $A(x_o\ f(x_o))$ είναι υποχρεωτικά σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f.

97. Αν για δύο συναρτήσεις f,g ορίζονται οι fog και gof, τότε είναι υποχρεωτικά fog $\neq$ gof.

98. Αν η συνάρτηση f έχει παράγουσα σε ένα διάστημα Δ και $\lambda \in$ IR *, τότε ισχύει: $\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx$

99. Αν $x \neq 0$, τότε ισχύει $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = -\infty$.

100. Έστω η συνάρτηση f(x) = εφx. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{x \,/\, συνx = 0\}$ και ισχύει: $f'(x) = \dfrac{1}{συν^2 x}$.

101. Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης f στο $x_0 \in \mathbb{R}$, τότε: $\lim\limits_{x\to x_o} \left(k\, f(x)\right) = k \lim\limits_{x\to x_o} \left(f(x)\right)$ για κάθε σταθερά $k \in \mathbb{R}$.

102. Μία συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1-1, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$.

103. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_o \in A$ (ολικό) ελάχιστο, το $f(x_o)$, όταν $f(x) < f(x_o)$ για κάθε $x \in A$.

104. Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_o και ισχύει $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_o, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) > \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

105. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα [α,β] και παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β) τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, ξ∈(α,β) τέτοιο, ώστε: $f'(\xi) = \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$

106. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_0του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

107. Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού IR και ορίζονται οι συνθέσεις fog και gof, τότε αυτές οι συνθέσεις είναι υποχρεωτικά ίσες.

108. Οι γραφικές παραστάσεις C και C΄ των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y = x που διχοτομεί τις γωνίες xOy και x΄Oy΄.

109. Αν υπάρχει το όριο της f στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}$, εφόσον $f(x) \geq 0$ κοντά στο x_0, με k ε N και $k \geq 2$.

110. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α λέμε ότι παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στο $x_0 \in A$, όταν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$

111. Κάθε συνάρτηση f συνεχής σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.
112. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα [α, β] και ισχύει f(x)<0 για κάθε x∈[α, β], τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τις ευθείες x=α, x=β και τον άξονα είναι $E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$
113. Ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=1$
114. Έστω μια συνάρτηση f που είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν f′(x) < 0 σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.
115. Αν είναι $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx>0$, τότε f(x) > 0 για κάθε x ∈ [α, β].
116. Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή σ' ένα διάστημα Δ, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f, σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της f με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

117. Μια συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση f(x)=y έχει ακριβώς μία λύση ως προς x.

118. Αν είναι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, τότε f(x)<0 κοντά στο x_0
119. $(\sigma\varphi x)'=\frac{1}{\eta\mu^2 x}$, x∈ℝ - {x|ημx≠0}
120. Να δείξτε ότι αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα Δ και ισχύει f'(x)=0 για κάθε εσωτερικό σημείο χ του Δ, τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.
121. Να δείξτε ότι αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και ισχύει f'(χ)>0 για κάθε εσωτερικό σημείο χ του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το διάστημα Δ.
122. Αν η $\mathbf{f:[\alpha,\beta]\to R}$ είναι παραγωγίσιμη, τότε η f παρουσιάζει μέγιστο για χ=ρ με f΄(ρ)=0.
123. Αν η $\mathbf{f:R^*\to R}$ είναι παραγωγίσιμη, με f΄(χ)=0 για κάθε χεR*, τότε η f είναι σταθερή.
124. Αν η $\mathbf{f:R\to R}$ παρουσιάζει καμπή στο χ=ρ τότε f΄΄(ρ)=0.
125. Αν η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω σε ένα διάστημα Δ, τότε η –f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο Δ.
126. Αν μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $\mathbf{f:R^*\to R}$ δεν είναι σταθερή, τότε υπάρχει ρεR* ώστε f(ρ) ≠0.
127. Υπάρχει συνάρτηση $\mathbf{f:R\to R}$ μη σταθερή, ώστε [x f(x)]'=0 για κάθε χεR.
128. Αν για την συνάρτηση $\mathbf{f:[\alpha,\beta]\to R}$ ισχύει f΄(χ)=0 για κάθε χε(α,β), τότε η f σταθερή στο [α,β].

129. Αν η συνάρτηση $f: R \to R$ έχει μόνο δύο τοπικά μέγιστα τα $(x_1,f(x_1))$, $(x_2,f(x_2))$ με $f(x_1)<f(x_2)$ τότε η μέγιστη τιμή είναι σίγουρα το $f(x_2)$).
130. Στο χ_0 που είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της f είναι δυνατόν η f να έχει και τοπικό ακρότατο και σημείο καμπής.
131. Αν στο χ_0 που είναι σημείο καμπής της f είναι $f''(\chi_0)=0$.
132. Πότε μια συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω σε ένα διάστημα Δ.
133. Πότε η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f λέμε ότι έχει:
κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $\chi=\chi_0$.
ασύμπτωτη την ευθεία $\psi=\lambda\chi+\beta$ στο $+\infty$.
134. Αν $f:A \rightarrow f(A)$ τότε $f(f^{-1}(x))=x$ για κάθε $x \in A$.
135. Η σταθερή συνάρτηση $f(x)=c\neq 0$ έχει αντίστροφη την $g(x)=\frac{1}{c}$.
136. Οι συναρτήσεις f και $(f^{-1})^{-1}$ είναι ίσες.
137. Αν η f γνησίως φθίνουσα τα κοινά σημεία των f και f^{-1} βρίσκονται μόνο στην y=x.
138. Αν ορίζεται η fog και είναι «1-1» τότε και η g είναι «1-1».
139. Αν ορίζεται η fog και η g είναι «1-1» τότε και η fog είναι «1-1».
140. Κάθε τοπικό ελάχιστο είναι μικρότερο από κάθε τοπικό μέγιστο.
141. Τα τοπικά ακρότατα είναι ολικά ακρότατα.
142. Τα ολικά ακρότατα είναι τοπικά ακρότατα.
143. Το μεγαλύτερο από τα τοπικά ακρότατα είναι το μέγιστο της συνάρτησης.
144. Στο [α,β] για την συνάρτηση f υπάρχει πάντα ακρότατο.
145. Αν το π.ο της f είναι το (α,β) τότε η f δεν έχει ακρότατα.
146. Αν το π.ο της f είναι το [α,β] τότε η f έχει ακρότατα.
147. Αν το π.ο της f είναι το [α,β] και είναι συνεχής τότε η f δεν έχει ακρότατα.
148. Σε κάθε «1-1» συνάρτηση κάθε οριζόντια ευθεία το πολύ σε ένα σημείο τέμνει την γραφική παράσταση της συνάρτησης.
149. Στο [α,β] για την παραγωγίσιμη συνάρτηση f υπάρχει πάντα ακρότατο.
150. Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο [α,β] και υπάρχει ακρότατο στο $x_o \in [\alpha,\beta]$ τότε $f'(x_o)=0$.
151. Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο [α,β] και υπάρχει ακρότατο στο $x_o \in (\alpha,\beta)$ τότε $f'(x_o)=0$.
152. Για την συνεχή συνάρτηση f στο [α,β] και υπάρχει ακρότατο στο $x_o \in (\alpha,\beta)$ τότε $f'(x_o)=0$.
153. Αν το (α,β) είναι το σύνολο τιμών της f τότε δεν έχει ακρότατα.
154. Αν μια συνεχή συνάρτηση f στο R , ισχύει: $f(x_1)=1$ και $f(x_2)=4$, τότε υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε: $f(x_0)=e$.
155. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [α, β], τότε υπάρχουν $x_1,x_2 \in [\alpha,\beta]$ με $f(x_1)\leq f(x)\leq f(x_2)$.
156. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α,β] τότε δεν μπορεί να εχει σύνολο τιμών το R.
157. Αν το 0 ανήκει στο π.ο της f τότε $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$.
158. Αν το x_o ανήκει στο π.ο της f και $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ τότε η f συνεχής στο x_o .
159. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α,β] τότε η f συνεχής στο χ=α.

160. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α,β] με f(α)≠f(β)τότε παίρνει μόνο τις τιμές μεταξύ των f(α),f(β) .
161. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α,β] με f(α)f(β)>0τότε η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο [α,β].
162. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο Α τότε η f στο Α έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.
163. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα [α, β], τότε το σύνολο τιμών της είναι: [f(α), f(β)].
164. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα [α, β], τότε το σύνολο τιμών της είναι: [f(β), f(α)].
165. Κάθε συνεχής συνάρτηση f στο [α, β] με f(α) ≠ f(β), παίρνει μόνο τις τιμές μεταξύ των f(α) και f(β).
166. Αν η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, τότε το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $\left(\lim_{x\to 0} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right)$.
167. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα [α, β]. Αν η f είναι 1-1 στο [α, β], τότε είναι και γνησίως μονότονη στο [α, β].
168. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 με $f(x_0)\neq 0$, τότε κοντά στο x_0 οι τιμές της f είναι ομόσημες του $f(x_0)$.
169. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ, τότε η αντίστροφή της είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο f(Δ).
170. Αν η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα διάστημα Δ είναι συνεχής και 1-1 στο Δ, τότε η συνάρτηση f^{-1} είναι συνεχής στο f(Δ).
171. Κάθε συνεχής συνάρτηση με πεδίο ορισμού το R έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.
172. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g δεν είναι συνεχής στο x_0, τότε η συνάρτηση f+g δεν είναι συνεχής στο x_0.
173. Αν οι συναρτήσεις f, g δεν είναι συνεχείς στο σημείο x_0 του κοινού πεδίου ορισμού τους, τότε η συνάρτηση f+g δεν είναι συνεχής στο x_0.
174. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε και η f^2 είναι συνεχής στο x_0.
175. Αν η f έχει αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και η γραφική παράσταση της f έχει κοινό σημείο Α με την ευθεία ψ=χ, τότε το σημείο Α ανήκει και στην γραφική παράσταση της f^{-1} .
176. Αν η f είναι συνεχής στο [α,β] με f(α)<0 και υπάρχει ρε(α,β) ώστε f(ρ)=0, τότε κατ' ανάγκη f(β)>0.
177. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σ΄ αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε χεΔ ή είναι αρνητική για κάθε χεΔ, δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ.
178. Αν $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ και f(x)>0 κοντά στο α τότε $\lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)} = +\infty$.
179. Ένα τοπικό μέγιστο μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο.
180. Το μέγιστο είναι τοπικό ακρότατο, το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα.
181. Το μέγιστο είναι μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα.

182. Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα δεν είναι πάντα μέγιστο.
183. Αν x_o εσωτερικό του Δ και παρουσιάζει τοπικό ακρότατο τότε $f'(x_o)=0$.
184. Αν x_o ε Δ και παρουσιάζει τοπικό ακρότατο και παραγωγίσιμη τότε $f'(x_o)=0$.
185. Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 δεν έχουν ασύμπτωτες.
186. Οι ρητές συναρτήσεις $\frac{P(x)}{Q(x)}$, με βαθμό του αριθμητή $P(x)$ μεγαλύτερο τουλάχιστον κατά δύο του βαθμού του παρονομαστή, δεν έχουν πλάγιες ασύμπτωτες.
187. Η γραφική παράσταση μιας γνησίως μονότονης συνάρτησης $f\colon \Re \to \Re$ διέρχεται από τα σημεία Α(3,2) και Β(4,-1) . Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα
Να λύσετε την ανίσωση : $f\,(f^{-1}(\chi) - 1) < 2$
188. Έστω $f\colon (0,+\infty) \to \Re$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $(0,+\infty)$ και α, β, γ >0 με α<β<γ τέτοια ώστε $f(\alpha) = \alpha$, $f(\beta) = \beta$, $f(\gamma) = \gamma$. Να αποδειχθεί
Υπάρχουν κ, λ τέτοια ώστε $f(\kappa) = \kappa f'(\kappa)$ και $f(\lambda) = \lambda f'(\lambda)$
Αν η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Α(κ, $f(\kappa)$) και Β(λ, $f(\lambda)$) διέρχεται και από το σημείο Ο(0,0) , να δειχθεί ότι υπάρχει $\chi_0 > 0$: $f''(\chi_0) = 0$
189. $\int_\alpha^\beta f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_\alpha^\beta + \int_\alpha^\beta f'(x)g(x)dx$, όπου f΄,g΄ είναι συνεχείς συναρτήσεις στο [α,β]
